

Numerische Modellierung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung schwebender Körper

Masterarbeit

eingereicht von: Boyko, Vyacheslav
geboren am: 01.03.1989 in: Charkiw, Land Ukraine
Studiengang: Physikalische Ingenieurwissenschaft
Erstgutachter: Prof. Dr. sc. techn. habil. Jörn Sesterhenn
Zweitgutachter: Dr.-Ing. Thomas Engels
Abgabedatum: 21. November 2016

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Unterschrift

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Thomas Engels, der mir das Thema der Arbeit vergeben hat. Er hat stets für Erklärungen und Unterstützung Zeit gefunden. Seine Ideen und Anregungen, Verbesserungsvorschläge und Literaturempfehlungen haben es mir ermöglicht mich mit dem Thema tiefgehend auseinanderzusetzen. Ich danke ihm auch für die Geduld und Bereitschaft meine Gedanken und Ideen zu verstehen. Genauso, wie für die Bereitstellung des Programmcodes, der die Grundlage meiner Arbeit bildet. Die Zusammenarbeit mit ihm war sehr erkenntnisreich und fruchtbar.

Ein großes und herzliches Dankeschön möchte ich an meine gute Freundin Anna Becker richten, die mich während der Erarbeitung des Themas moralisch unterstützt hat. Genauso wie meinem Schulfreund David Siewert, der meine Fragen aus der Sicht eines Programmentwicklers beantwortet hat.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit verwendet numerische Simulation, um die Fluid-Struktur-Wechselwirkung schwebender Körper der Form eines Λ -Fliegers in einer um die Nulllage oszillierender Strömung bei $Re = 500$ zu untersuchen. Die Berechnung der Interaktion wird dabei mit der *Volume-Penalization*-Methode realisiert, und das Fluid wird mit FOURIER-Diskretisierung gelöst.

Die Ergebnisse aus der Untersuchung des Flugverhaltens des Λ -Fliegers konnten zeigen, dass dieser Körper mit einem Öffnungswinkel von 120° das beste Steigen aufweisen. Des Weiteren wurde festgestellt, dass für Öffnungswinkel kleiner als 80° die Lagestabilität verloren geht. Der Auftriebs- und Stabilisierungsmechanismus entsteht auf Grund der abfließenden Wirbelpaare. In einem Experiment konnte gezeigt werden, dass die Stabilisierung bei einer schief oszillierenden Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls stattfinden kann.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Versicherung	i
Danksagung	ii
Zusammenfassung	iii
Abbildungsverzeichnis	vi
Tabellenverzeichnis	ix
Nomenklatur	x
Lateinische Formelzeichen	x
Griechische Formelzeichen	xi
Abkürzungsverzeichnis	xii
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit	3
1.3 Methodische Vorgehensweise	4
2 Theoretische Einführung	7
2.1 Physikalische Grundlagen	7
2.1.1 Bewegungsgleichungen des Fluids	8
2.1.2 Formulierung der NGS für spektrale Methoden	10
2.1.3 Poisson-Gleichung für den Druck	12
2.1.4 Bewegungsgleichungen des Körpers	13
2.1.5 Fluid-Struktur-Wechselwirkung	14
2.2 Entdimensionalisierung	16
2.3 Numerische Grundlagen	19
2.3.1 Diskretisierung der Zeitableitung	19
2.3.2 Systemkopplung in der Zeit	20
2.3.3 Diskretisierung der Raumableitung	23
2.3.4 Randbedingungen	23
2.3.5 Stabilität	25
2.4 Passive Transformation	25

3	Modellierung des Λ-Fliegers	29
3.1	Mathematisches Modell	29
3.2	Definition von Parametern des Fliegers	32
3.3	Trägheitsmoment	34
3.4	Relation der Koordinatensysteme	36
3.5	Maskenfunktion	39
3.5.1	Diskontinuierlich	40
3.5.2	Geglättet	41
3.6	Adaptiv begrenzter Rechenraum	44
4	Validierung des Löser	47
4.1	Experimentelle Konsistenzordnung	47
4.1.1	Ordnung der Zeitdiskretisierung	49
4.1.2	Ordnung der Raumdiskretisierung	50
4.2	Einfluss der Randbedingungen	52
4.3	Plausibilitätstests	56
4.3.1	Relaxation des linearen Impulses	57
4.3.2	Relaxation des Drehimpulses	59
4.4	Zustand des stationären Schwebens	60
4.4.1	Grenzgeschwindigkeit beim freien Fall	60
4.4.2	Anströmen mit der Grenzgeschwindigkeit	62
5	Simulation und Ergebnisse	65
5.1	Einfluss der Viskosität auf den Auftriebsbeiwert	66
5.2	Variation der Strömungsbeschleunigung	77
5.3	Variation des Öffnungswinkels	82
5.4	Inzidenzwinkel der Anströmung	87
6	Diskussion der Ergebnisse	92
7	Zusammenfassung und Ausblick	94
	Literatur	96

Abbildungsverzeichnis

2.1	Bilanz der Kräfte, die auf einen starren Körper im Fluid wirken.	13
2.2	Algorithmus für die Berechnung des RK2.	21
2.3	Algorithmus für die Berechnung des RK2 für gekoppelte Systeme.	22
2.4	Passive Transformation eines Vektors.	26
3.1	Skizze zur Erläuterung des mathematischen Modells.	30
3.2	Definition von Parametern des Fliegers.	32
3.3	Skizze der approximierten Geometrie für die Berechnung des Trägheitsmoments.	34
3.4	Explosionszeichnung des vereinfachten Λ -Flieger zur Veranschaulichung der Relation von Koordinatensystemen.	37
3.5	Detaillierte Skizze der Koordinatensysteme.	38
3.6	Konvexe Hülle, gebildet aus einem rechtwinkligen Viereck.	41
3.7	Komposition der diskontinuierlichen Maske χ_d des Λ -Fliegers.	42
3.8	Skizze zur Erklärung der Glättungsschicht.	42
3.9	Darstellung der einzelnen Funktionsverläufe, aus denen sich die Glättungsschicht zusammensetzt.	43
3.10	Komposition der geglätteten Maske χ des Λ -Fliegers.	44
3.11	Skizze zur Erläuterung des adaptiv begrenzten Rechenraums.	45
4.1	Aufbau der numerischen Simulation für die Bestimmung der Konsistenzordnung.	48
4.2	Ordnung der Zeitdiskretisierung für das gekoppelte System.	50
4.3	Ordnung der Raumdiskretisierung für das gekoppelte System.	51
4.4	Darstellung der Wirbelstärke um den Λ -Flieger in einer oszillierenden Strömung bei $Re = 300$	52

4.5	Die auf den Λ -Flieger in y -Richtung wirkende aerodynamische Kraft in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens.	53
4.6	Die Höhenlage des Λ -Flieger in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens.	54
4.7	Die mittlere Geschwindigkeit des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens und der REYNOLDS-Zahl.	55
4.8	Skizze der Simulation für die Plausibilitätstests.	57
4.9	Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des linearen Impulses in Abhängigkeit von der Anfangsbeschleunigung.	58
4.10	Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des linearen Impulses in Abhängigkeit von der Viskosität.	58
4.11	Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des Drehimpulses in Abhängigkeit von der Anfangswinkelbeschleunigung.	59
4.12	Skizze der Simulation zur Überprüfung des Zustandes des stationären Schwebens.	61
4.13	Fallgeschwindigkeit und Wirbelstärke beim freien Fall des Fliegers bei $Re = 100$	62
4.14	Geschwindigkeitsverlauf und Wirbelstärke in der Studie zum stationären Schweben bei $Re = 100$	63
5.1	Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für $Re = \{400; 800\}$ und $\kappa = 1$	69
5.2	Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für $Re = \{400; 800\}$ und $\kappa = 1$	70
5.3	Gemittelte Auftriebs- und Momentenbeiwerte des fallenden Λ -Fliegers für $Re = \{400; 800\}$	70
5.4	Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$	71
5.5	Darstellung der Druckverteilung bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$	72
5.6	Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$	73
5.7	Darstellung der Druckverteilung bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$	74

5.8	Wirbelausbreitung im Kontrollvolumen. Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$	75
5.9	Wirbelausbreitung im Kontrollvolumen. Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$	76
5.10	Die Bewegungsbahn des Λ -Fliegers bei $Re = 500$ für unterschiedliche κ	78
5.11	Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ bei $Re = 500$	79
5.12	Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ bei $Re = 500$	79
5.13	Die über die Zeit gemittelte Änderung der Höhenlage des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von κ	80
5.14	Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 500$, $\kappa = 5$	81
5.15	Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für unterschiedliche α bei $Re = 250$	83
5.16	Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für unterschiedliche α bei $Re = 250$	83
5.17	Die über die Zeit gemittelte Änderung der Höhenlage des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von α	84
5.18	Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 250$, $\kappa = 4$ und $\alpha = \pi/6$	86
5.19	Skizze zur Erklärung der unter einem Winkel zur Gravitationskraft oszillierenden mittleren Strömung.	87
5.20	Darstellung von \bar{C}_m über die Zeit bei der Simulation, in der die Anströmung einen Inzidenzwinkel ($\frac{\pi}{18}$) aufweist ($Re = 250$, $\kappa = 4$).	88
5.21	Entstehung der Wirbel. Darstellung der Wirbelstärke (links) und der Geschwindigkeit (rechts) bei $Re = 250$, $\kappa = 4$	90
5.22	Abfließen der Wirbel. Darstellung der Wirbelstärke (links) und der Geschwindigkeit (rechts) bei $Re = 250$, $\kappa = 4$	91

Tabellenverzeichnis

4.1	Parameter der Simulationen für die Bestimmung der Konsistenzordnung.	49
4.2	Parameter der Simulationen für die Studie zum Zustand des stationären Schweben.	61
5.1	Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Abhängigkeit der aerodynamischen Kräfte von der REYNOLDS-Zahl.	67
5.2	Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Flugeigenschaften bei unterschiedlicher Strömungsbeschleunigung.	77
5.3	Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Flugeigenschaften bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln.	82
5.4	Parameter der Simulation mit der Anströmung, welche einen Inzidenzwinkel aufweist.	88

Nomenklatur

Lateinische Formelzeichen

A	Spitzen-Tal-Wert der oszillierenden Amplitude
C_m	Momentenbeiwert
C_y	Auftriebsbeiwert
C_η	Permeabilitätsparameter des Λ -Fliegers
C_{sp}	Permeabilitätsparameter des Wirbeldämpfgebiets
F_i	Aerodynamische Kraft, die auf den Λ -Flieger im Fluid wirkt
I_i	Linearer Impuls
J	Trägheitsmoment des Λ -Fliegers
L_c	Drehimpuls
L_x	Länge des Kontrollvolumens in x -Richtung
L_y	Länge des Kontrollvolumens in y -Richtung
M	Moment, das auf den Λ -Flieger im Fluid wirkt
N_x	Anzahl der Gitterpunkte in x -Richtung
N_y	Anzahl der Gitterpunkte in y -Richtung
Re	REYNOLDS-Zahl
T	Periode der oszillierenden Strömungsgeschwindigkeit
T_{end}	Gesamte Rechendauer einer Simulation
$\Delta\langle y_s \rangle$	Mittlere Änderung der Höhenlage (y_s) des Λ -Fliegers über die gesamte Rechendauer
Δt	Zeitschritt
$\Delta x = \Delta y$	Abstand zwischen den Gitterpunkten
D_i	Term aus der NSG, der für das Dämpfen der Wirbel zuständig ist
\mathbb{k}_i	Wellenvektor
ψ	Stromfunktion
g	Gravitationsbeschleunigung
p	Thermodynamischer Druck
u_i	Geschwindigkeitskomponenten des Fluids
v_i	Geschwindigkeitskomponenten des Λ -Fliegers
x_g	Vektor des Schwerpunktes vom Λ -Flieger mit (x_s, y_s)

\hat{g}_f	Rechte Seite des Differentialgleichungssystems des Fluids
\hat{g}_k	Rechte Seite des Differentialgleichungssystems des Körpers
$\mathbb{F}; (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$	Inertialsystem mit seinen Basisvektoren
$\mathbb{K}; (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$	Koordinatensystem des Körpers mit seinen Basisvektoren
$\mathbb{L}; (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$	Koordinatensystem des linken Flügels mit seinen Basisvektoren
$\hat{\mathbb{R}}; (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$	Koordinatensystem des rechten Flügels mit seinen Basisvektoren
\overline{C}_m	Gemittelter Momentenbeiwert über eine Periode
\overline{C}_y	Gemittelter Auftriebsbeiwert über eine Periode
\widehat{C}_m	Gemittelter Momentenbeiwert über die ganze Rechen-dauer
\widehat{C}_y	Gemittelter Auftriebsbeiwert über die ganze Rechen-dauer
$a_{s,1}; a_{s,2}$	Beschleunigungskomponenten des Schwerpunktes vom Λ -Fliegers
f	Oszillationsfrequenz der Strömungsgeschwindigkeit
h	Flügelstärke
k	Optimierungsfaktor in der <i>Volume-Penalization</i> Methode
l	Flügelstärke
m	Masse des Λ -Fliegers
s	Dicke der Glättungsschicht
t	Zeit
u_∞	Charakteristische Geschwindigkeit
$v_{s,1}; v_{s,2}$	Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes vom Λ -Fliegers
$x_s; y_s$	Komponenten des Schwerpunktes vom Λ -Flieger

Griechische Formelzeichen

Ω_f	Kontrollvolumen
Ω_k	Festkörper
Ω_s	Wirbeldämpfgebiet
α	Halber Öffnungswinkel der Flügel des Λ -Fliegers
β	Dimensionslose Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit
Π	Totaldruck
χ	Maske in dem <i>Penalisation</i> -Term
χ_{sp}	Maske des Wirbeldämpfgebiets
ω	Wirbelstärke
ρ	Dichte des Fluids
σ_{ji}	CAUCHY'scher Spannungstensor
τ_{ji}	Deviatorischer Anteil des Spannungstensors
$\dot{\theta}$	Rotationsbeschleunigung des Λ -Fliegers
δ_{ji}	KRONECKER-Delta
$\dot{\theta}$	Rotationsgeschwindigkeit des Λ -Fliegers
κ	Dimensionslose Strömungsbeschleunigung
λ	Volumenviskosität
μ	Dynamische Viskosität
ν	Kinematische Viskosität
ρ_k	Dichte des Körpers
θ	Lagewinkel des Λ -Fliegers
ε_{ijk}	LEVI-CIVITA-Symbol

Abkürzungsverzeichnis

BV	<i>Bounding Volume</i>
CFL-Zahl	COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Zahl
DGl	Differentialgleichung
DGls	Differentialgleichungssystem
FFT	schnelle FOURIER-Transformation (eng.: <i>Fast FOURIER Transform</i>)
FSI	Fluid-Struktur-Wechselwirkung (eng.: <i>Fluid-Structure Interaction</i>)
IB	Impulsbilanz
KOS	Koordinatensystem
MB	Massenbilanz
NSG	NAVIER-STOKES-Gleichung
RB	Randbedingungen
RK2	Verfahren von RUNGE-KUTTA 2-ter Ordnung
VPM	<i>Volume-Penalization-Methode</i>

1 Einleitung

Der Mensch entwickelt sich und gewinnt Wissen aus der Natur. Er versucht ihre komplexen Mechanismen zu verstehen und nachzuahmen, um daraus Anwendungen zu konstruieren, welche effizienter funktionieren. Die Natur ist eine große Inspiration für Ingenieure, Mathematiker, Physiker und das nicht ohne Grund. Die Gesetze der Evolution formten das Tierreich, in dem die Lebewesen nicht nur ums Überleben kämpften, sondern auch mit den Umweltbedingungen.

Die Nachahmung der Natur brachte der Menschheit ein breites Feld technischer Anwendungen. Die Innovationen stammen aus unterschiedlichen Bereichen der Naturwissenschaft. In der Fluidodynamik wurde z. B. aus einer Untersuchung der Haifischhaut eine besondere Oberflächenbeschaffenheit (Riblets) zur Reduktion des Reibungsweidstandes entwickelt [17]. Die sogenannten Winglets an den Flügelspitzen eines Flugzeugs verringern den induzierten Widerstand [10]. Dieses Konstrukt entstand durch die Studie bestimmter Vogelarten. Der Luftfahrtpionier LILIENTHAL erforschte ebenfalls den Vogelflug. Mit seinen experimentellen Untersuchungen zur Profilgeometrie eines Flügels legte er den Grundstein der Luftfahrt [22].

Einige Experimente von LILIENTHAL befassten sich auch mit dem Mechanismus, der dem Flügelschlag ähneln sollte. Jedoch stellte sich heraus, dass es leichter ist, eine fliegende Maschine zu bauen, bei der die Auftriebs- und Schuberzeugung voneinander getrennt sind. Die Neugier blieb aber bestehen.

Dem Prinzip des Flügelschlages zur Auftriebgenerierung folgen auch die Insekten. Neben dem Auftrieb ist die Frage nach den Flugeigenschaften bei schwierigen Bedingungen, z. B. Turbulenz oder Sandsturm, interessant, weil die Insekten damit klar kommen können.

1.1 Problemstellung

Um die Flugeigenschaften von Insekten zu studieren, entstehen Probleme, die bei der Untersuchung von Vögeln nicht vorhanden sind.

Insekten sind viel kleiner und lassen sich schwerer beobachten. Sie haben außerdem keine aerodynamische Flügelprofilgeometrie, jedoch aber eine flexible Flügelstruktur. Das Verhalten der Insekten ist zudem schwierig vorhersehbar und macht somit die Erfassung eines hochfrequenten Flügelschlags zu einer Herausforderung.

Eine andere Möglichkeit die Fragestellung zu erforschen bietet die Numerik. Es gibt eine große Anzahl an Methoden im Bereich der numerischen Fluid- und Strukturmechanik, die das ermöglichen. In einer Berechnung des Flügelschlages muss eine Fluid-Struktur-Wechselwirkung (eng.: *Fluid-Structure Interaction*) (FSI) gelöst werden. Die FSI ist in vielen Bereichen der Wissenschaft wichtig. Insbesondere da, wo sich bewegende Strukturen das Strömungsfeld maßgeblich beeinflussen können. Als Beispiel können Blutströmungen in Gefäßen oder flexible Rotorblätter einer Windkraftanlage genannt werden [5].

Meistens ist ein Vorgang, der eine FSI umfasst, instationär. Dies kann komplexe Mechanismen der Wechselwirkung zwischen Struktur und Fluid, deren Erkennung und Verständnis grundlegende Untersuchungen erfordern, involvieren. Obwohl uns die Methode der FSI einen Einblick in die komplexen physikalischen Vorgänge gewähren kann, sind sie sehr rechenintensiv. Die Komplexität der FSI kann vereinfacht werden, wenn die Festkörper als starr angenommen werden.

Die FSI wird unter anderem auch zu Untersuchung des Insektenfluges eingesetzt. Dabei werden neue numerische Methoden entwickelt, um die FSI effizienter zu lösen. Dies zeigt eine Arbeit, in der das Fliegen einer Hummel in einer turbulenten Strömung untersucht worden ist [13].

Die Problematik des aktiven Flügelschlages kann durch eine Analogie des passiven Schwebens in oszillierender Strömung vereinfacht werden [18], [30]. Das Schweben des Körpers im Gravitationsfeld geschieht dabei nur durch die aerodynamischen Kräfte, ohne weitere interne Mechanismen zur Auftriebserzeugung. Die Strömungsgeschwindigkeit oszilliert dabei um die Nulllage, hat also keine mittlere Bewegung. In realen Experimenten konnte gezeigt werden, dass ein Körper in Form einer Pyramide in solch einer Strömung stabil schweben

kann [32]. Die Untersuchung der passiv schwebenden Körper ist eine Vereinfachung des aktiven Flügelschlages und soll das Verständnis der grundlegenden Mechanismen der Flugmechanik von Insekten vermitteln.

Die asymmetrische Form und die einhergehenden Unterschiede in den gemittelten Kraftbeiwerten alleine reichen bei weitem nicht, um das Schweben zu erklären; vielmehr muss die instationäre Wirbelbildung mit einbezogen werden. Das entstehende Wirbelsystem ist dem von Insekten erzeugten ähnlich.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Diese Arbeit befasst sich mit der numerischen Modellierung der FSI von starren Körpern in einer Strömung, die um die Nulllage oszilliert.

Die Fragestellung wird im zweidimensionalen Raum gelöst. Die Körper haben die Form eines Hütchens(Λ), welches unterschiedliche Öffnungswinkel haben kann. Sie werden im Folgenden als Λ -Flieger, analog zu [32], bezeichnet. Im zweidimensionalen Raum stellen sie eine Approximation einer Pyramide oder eines Konus dar.

Andere Forscher haben das Schweben des Λ -Fliegers numerisch mit *Vortex-Sheet*-Modell untersucht [18], und kamen im Hinblick auf das Flugverhalten zu interessanten Ergebnissen. Insbesondere zu dem, dass die Steigrate mit kleiner werdenden Öffnungswinkeln größer wird. In deren Arbeit wird der Effekt der Viskosität modelliert, es stellt somit einen Unterschied zu der NAVIER-STOKES-Gleichung (NSG) dar. Eine Studie der Dynamik des zweidimensionalen Λ -Fliegers mit der NSG für $Re < 200$ ist ebenfalls durchgeführt worden [30]. Aus den realen 3D Experimenten mit einer Pyramide [32] geht hervor, dass die $Re > 500$ sein sollte.

Die Zielstellung setzt sich somit aus zwei Unterzielen zusammen. Das erste Ziel ist es, einen effizienten Löser zu programmieren. Dieser Löser soll die FSI des Λ -Fliegers in einer oszillierenden Strömung mit einer direkten numerischen Simulation berechnen. Das zweite Ziel ist

es, mit diesem Löser das Flugverhalten des Λ -Fliegers bei $Re > 200$ zu untersuchen und mit den Ergebnissen von [18] zu vergleichen.

1.3 Methodische Vorgehensweise

Die Basis des FSI-Lösers bildet der zur Verfügung stehende Programmcode (UP2D) des Instituts. Dieser kann eine direkte numerische Simulation der NSG mit *Volume-Penalization*-Methode (VPM) und spektraler Diskretisierung für einen statischen Zylinder lösen. Der UP2D ist in MATLAB und Fortran implementiert. Der in Fortran implementierte Löser führt Berechnungen schneller, als der in MATLAB implementierte, durch. Auf der anderen Seite ist die für eine Implementierung in Fortran benötigte Zeit länger als in MATLAB.

Als erster Schritt der Arbeit wird der FSI-Löser auf Basis des bestehenden Codes in MATLAB entwickelt und dann auf Fortran übertragen. Im zweiten Schritt wird der Fortran-Code mit numerischen Experimenten validiert.

Für die Untersuchung der Flugeigenschaften des Λ -Fliegers wird als nächstes eine Studie durchgeführt, um das Vorhandensein einer Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl zu bestimmen. Daraus soll eine angemessene REYNOLDS-Zahl für die weiteren Studien gewählt werden.

Zwei Studien werden angestellt, um das Flugverhalten mit [18] zu vergleichen. Dabei geht es um die Variation des Öffnungswinkels und der Strömungsbeschleunigung. Diese Parameter sollen sich auf die Steigrate des Λ -Fliegers auswirken.

Der Zustand des Schwebens kann nicht allein durch die Überwindung der Schwerkraft eintreten. Es muss ein Mechanismus vorhanden sein, der die Stabilität des Fliegers gewährleistet. Abschließend wird in einem numerischen Experiment gezeigt, dass die Lagestabilität im Mittel auch bei einer schiefen Oszillation der Strömung erreicht werden kann.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im theoretischen Teil werden die mathematischen Methoden der numerischen Modellierung erklärt. Danach, im Kapitel 3 wird der virtuelle Λ -Flieger definiert und konstruiert. Im darauf folgenden Kapitel weisen die Ergebnisse der Validierungstests die Richtigkeit der Implementierung nach. Im Kapitel 4 sind die Ergebnisse und Vergleiche mit der Literatur vorzufinden. Den Abschluss der Arbeit bildet die Diskussion und die Zusammenfassung mit einem Ausblick.

2 Theoretische Einführung

In den Abschnitten dieses Kapitels werden die theoretischen Grundlagen folgende Themengebiete umfassen.

In den physikalischen Grundlagen sind die Gesetze und Gleichungen, welche die Bewegung des Fluids und des Festkörpers beschreiben, erklärt. Unter Anderem ist die Formulierung der NSG für spektrale Methoden präzisiert. Des Weiteren ist erläutert, wie die FSI mit der VPM realisiert ist.

Einen weiteren wichtigen Aspekt behandelt der Abschnitt zur Entdimensionalisierung. Die eingeführten Gleichungen werden dimensionslos gemacht, und zwar so, dass der Parameterraum mit der Referenzstudie [18] übereinstimmt. Dies ermöglicht einen unkomplizierten Vergleich.

Im Teil der numerischen Grundlagen werden die Methoden geschildert, mit denen die Gleichungen numerisch gelöst werden. Im letzten Abschnitt wird die passive Transformation erwähnt. Sie wird bei der Modellierung des Λ -Fliegers eingesetzt.

2.1 Physikalische Grundlagen

In den unteren Abschnitten werden Sachverhalte erklärt, welche an folgenden Erläuterungen bedarf haben könnten.

Das LEVI-CIVITA-Symbol ist in \mathbb{R}^3 definiert wie folgt:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}, \\ -1 & \text{für } \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213}, \\ 0 & \text{für zwei gleiche Indizes.} \end{cases} \quad (2.1)$$

In \mathbb{R}^2 wird es zu einer 2×2 Matrix:

$$\varepsilon_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Mit diesem Symbol lässt sich die Rotation eines Vektorfeldes in \mathbb{R}^3 schreiben als [29]:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \text{rot}(\vec{u}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$

Der freie Index i gibt die Dimension an. Wird der Operator auf 2D vereinfacht, bedeutet das, dass die partielle Ableitung in die dritte Raumrichtung null wird. Somit steht der Rotationsvektor senkrecht auf der \mathbb{R}^2 -Ebene und kann als ein Skalarfeld betrachtet werden:

$$\omega = \varepsilon_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (2.4)$$

2.1.1 Bewegungsgleichungen des Fluids

Als Ausgangspunkt dienen die zwei Erhaltungssätze in differentieller Form [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \sigma_{ji}) = 0. \quad (2.6)$$

Die Gl. 2.5 stellt die Massenbilanz (MB) dar. Dabei ist ρ die Massendichte und u_i - Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. In der Impulsbilanz (IB) (Gl. 2.6) ist σ_{ji} der CAUCHY'sche Spannungstensor [23, S.52]. Die Gravitationskraft wird in der 2.6 nicht berücksichtigt, weil die Höhenänderung des Kontrollvolumens in Betracht des hydrostatischen Drucks vernachlässigbar ist. Durch das Anwenden der Kettenregel und Einsetzen der MB in die IB entsteht:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.8)$$

Die Berechnungen werden im Bereich kleiner Mach-Zahlen mit folgenden Annahmen durchgeführt. Das Fluid wird als inkompressibel angenommen und die Dichte des Fluids ist konstant in Raum und in der Zeit. Damit gilt $\partial\rho/\partial t = \partial\rho/\partial x_i = 0$ und die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.10)$$

Für σ_{ji} muss eine konstitutive Gleichung gewählt werden, um das Fluidverhalten zu beschreiben. Dazu schauen wir uns den CAUCHY'schen Spannungstensor an. Dieser kann ausgeschrieben werden als [4, S.142]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ji} = -p\delta_{ji} + \boldsymbol{\tau}_{ji}, \quad (2.11)$$

wo p der thermodynamische Druck, δ_{ji} das KRONECKER-Delta und $\boldsymbol{\tau}_{ji}$ der deviatorische Anteil des Spannungstensors ist:

$$-p\delta_{ji} + \boldsymbol{\tau}_{ji} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Für ein newtonisches viskoses Fluid, wo die Scherspannungen proportional den Geschwindigkeitsgradienten sind, ist der Ausdruck für den Spannungstensor gegeben als [4, S.144]:

$$\boldsymbol{\tau}_{ji} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_k} \right) + \delta_{ji} \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_k}. \quad (2.13)$$

Dabei ist μ die dynamische Viskosität und λ die Volumenviskosität. Unter der Berücksichtigung der Divergenzfreiheit (s. Gl. 2.9) vereinfacht sich $\boldsymbol{\sigma}_{ji}$ zu [26, S.16]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.14)$$

Mit der MB für inkompressible Fluide ergibt die Ableitung des CAUCHY'schen Spannungstensors:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (2.15)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.16)$$

Die Gl. 2.15 eingesetzt in Gl. 2.10 ergibt die grundlegende Gleichung für inkompressible Fluide, wo $\nu = \mu/\rho$ die kinematische Viskosität ist. Diese Gleichung wird auch als die inkompressible NSG bezeichnet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Der Druck p ist nicht bekannt und soll aus einer weiteren Gleichung bestimmt werden (s. Abschn. 2.1.3).

2.1.2 Formulierung der NGS für spektrale Methoden

Für diese Arbeit wird die Gl. 2.17 in eine andere Form gebracht, die besser für spektrale Methoden (s. Abschn. 2.3.3) geeignet ist [25, S.212]. Dieser Abschnitt behandelt diese Umformung. Der nichtlineare Term kann mit folgender Identität umgeschrieben werden [27, S.218]:

$$\mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} |\mathbf{u}_i|^2 + \underbrace{\varepsilon_{inl} \varepsilon_{njk}}_{\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \mathbf{u}_l, \quad (2.18)$$

mit $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, wo $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

Um den zweiten Term der Gl. 2.18 in \mathbb{R}^2 auswerten zu können, wird eine andere Darstellung des Kreuzproduktes gewählt. Die Rotation kann auch mit Hilfe der schiefsymmetrischen Kreuzproduktmatrix

berechnet werden:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = [\omega]_{\times} \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \vec{r}. \quad (2.19)$$

Für den Fall in \mathbb{R}^2 ergibt sich die Kreuzproduktmatrix zu:

$$[\omega]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Somit kann die Gl. 2.18 mit Hilfe von Gl. 2.4 für zwei Dimensionen wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} |\mathbf{u}_i|^2 + \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n, \quad (2.21)$$

mit der Matrixmultiplikation in Indexnotation $c_i = S_{ik} x_k$.

Als nächsten Schritt betrachten wir den Totaldruck Π , der sich aus den statischen \mathbf{p} und dynamischen Druck zusammensetzt:

$$\frac{\Pi}{\rho} = \frac{\mathbf{p}}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_i|^2. \quad (2.22)$$

Dann kann die IB mit Gl. 2.21 umgeschrieben werden zu:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_i|^2 \right) + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.23)$$

und mit Gl. 2.22 ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.24)$$

Aus dieser Impulsgleichung kann in \mathbb{R}^2 eine Gleichung für den Druck hergeleitet werden. Das ist im folgenden Abschnitt aufgeführt.

2.1.3 Poisson-Gleichung für den Druck

Um eine Gleichung für den Druck zu ermitteln, wird die Divergenz der IB berechnet. Eine detaillierte Herleitung ist von einer IB der Form Gl. 2.17 hier [28] zu finden. Unter der Einhaltung der Divergenzfreiheit aus der MB ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0. \quad (2.26)$$

Mit diesen Vereinfachungen resultiert die Druckgleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial x_l \partial x_l} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n. \quad (2.27)$$

Auf der rechten Seite befindet sich in der Klammer die Rotation der Geschwindigkeit. Damit bestimmt sich die Kreuzproduktmatrix. Sie wird mit den Komponenten der Geschwindigkeit ausmultipliziert, und die Divergenz davon ergibt ein Skalarfeld. Mit dem POISSON-Löser kann dann der Druck $\mathbf{\Pi}$ bestimmt werden. Somit wird in jedem Zeitschritt eine Druckgleichung gelöst.

Die Gl. 2.27 ist eine elliptische Gleichung und braucht Randbedingungen an den Stellen des Kontrollvolumens, wo eine feste Wand ist [28]. In dieser Arbeit wird eine freie Umströmung simuliert. Diese Bedingung wird dadurch modelliert, dass an den Rändern des Kontrollvolumens periodische Randbedingungen gesetzt sind. Die Oberfläche des Körpers stellt mit sich auch eine Wand dar. Durch die VPM, wird dieser Umstand umgangen (s. Abschn. 2.1.5.). Es brauchen keine weiteren Randbedingungen für die Druckgleichung definiert werden.

2.1.4 Bewegungsgleichungen des Körpers

Die Bewegung des starren Körpers ist in der newtonischen Mechanik durch die Erhaltung des linearen Impulses und des Drehimpulses beschrieben. Bei einem starren Körper greifen alle Kräfte im Schwerpunkt an. In der Abb. 2.1 ist ein Körper beliebiger Form, der unter dem Einfluss der aerodynamischen Kräfte bezüglich eines Inertialsystems \mathbb{F} in Bewegung ist, gezeichnet. Die Kräfte entstehen auf Grund des Fluids, das den Körper umströmt.

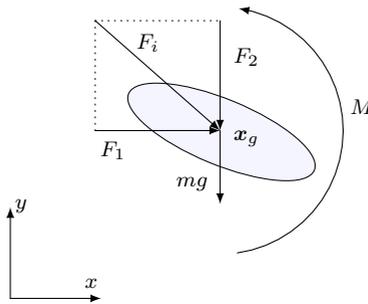


Abb. 2.1: Bilanz der Kräfte, die auf einen starren Körper im Fluid wirken. Die aerodynamischen Kräfte sind beispielhaft skizziert und beinhalten das Vorzeichen.

Die drei Gleichungen sind:

$$\text{x-Richtung: } m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} = F_1(t); \quad (2.28)$$

$$\text{y-Richtung: } m \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} = F_2(t) - mg; \quad (2.29)$$

$$\text{Drall: } J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = M(t). \quad (2.30)$$

Die wirkenden aerodynamischen Kräfte sind unbekannt und werden aus der Lösung der NSG in jedem Zeitschritt neu berechnet. Dementsprechend ist auch das Vorzeichen der Kraft vom Fluid vorgegeben. Die Gleichungen können als ein Differentialgleichungssystem (DGIS)

erster Ordnung wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_s \\ v_{s,1} \\ y_s \\ v_{s,2} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s,1} \\ F_1(t)/m \\ v_{s,2} \\ F_2(t)/m - g \\ \dot{\theta} \\ M(t) \end{bmatrix}; \quad (2.31)$$

zusammengefasst ergibt:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \text{RHS}_s(t). \quad (2.32)$$

Der Vektor \mathbf{X} ist der Lösungsvektor des starren Körpers und beschreibt seine Kinematik. Die rechte Seite der Gl. 2.32 ist unbekannt, weil diese von der Lösung der NSG abhängt. Sie muss explizit für jeden Zeitschritt bestimmt werden. Die Kopplung wird dadurch ermöglicht, dass beide DGS'e mit dem gleichen Verfahren (s. Abschn. 2.3.2) in der Zeit diskretisiert werden.

2.1.5 Fluid-Struktur-Wechselwirkung

Für die Berechnung der FSI wird in dieser Arbeit die VPM benutzt. Der Vorteil liegt darin, dass kein zusätzliches Gitter für den Festkörper generiert werden muss, da das Fluid und der Körper in einem Raum gelöst werden [2], [14], [20].

Der Hauptgedanke dieser Methode ist es, den Rechenraum des Fluides in den Körper zu erweitern. Dabei wird angenommen, dass der Körper eine bestimmte Permeabilität aufweist. Entsprechend werden die NSG um einen Zusatzterm ergänzt. Für eine einfachere Handhabung der Gleichungen wird in diesem Abschnitt folgende Abkürzung eingeführt:

$$\text{RHS}_f(t) = - \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.33)$$

somit hat die *penalized* NSG die Form:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = \text{RHS}_f(t) - \underbrace{\frac{\chi}{C_\eta}(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)}_{\text{Penalization-Term}}; \quad (2.34)$$

wo \mathbf{v}_i die Geschwindigkeit des starren Körpers und χ die Maskenfunktion sind. Der C_η Faktor ist der Parameter, der die Permeabilität steuert. Es wurde nachgewiesen, dass mit $C_\eta \rightarrow 0$ die Gl. 2.34 gegen die NSG konvergiert [2]. Der optimale C_η -Wert ist von der Raumdiskretisierung abhängig und beträgt:

$$C_\eta = \frac{(k\Delta x)^2}{\nu}, \quad (2.35)$$

wo k aus einem Bereich $k = \{0,1; 0,4\}$ gewählt werden soll, um eine optimale Konvergenzeigenschaft der Methode zu erreichen [13]. Die Maskenfunktion repräsentiert die Geometrie des Festkörpers. Ihr Wertebereich ist $\{0; 1\}$ und ist definiert als:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{im Körperinneren,} \\ 0 & \text{fürs Körperäußere.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Mit anderen Worten, der *Penalization*-Term ist nur im Körperinneren aktiv. Hat der Körper keine Geschwindigkeit, wirkt dieser Term als eine Senke. Des Weiteren hat die Maske einen Glättungsrand, der eine ausreichend glatte Bewegung des Körper zu berechnen ermöglicht [21]. Weitere Einzelheiten sind in Abschn. 3.5 erklärt.

Die aerodynamische Kraft und das Moment, die auf den Körper wirken, lassen sich mit dem *Penalization*-Term bestimmen [13, S. 31ff]:

$$F_i = \int_{\Omega_s} \frac{\chi}{C_\eta}(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)dV, \quad (2.37)$$

$$M = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{jk} r_j \frac{\chi}{C_\eta}(\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)dV. \quad (2.38)$$

Für schlanke Körper, deren Volumen vernachlässigbar klein ist, wird

ein zusätzlicher Term, genannt *Unsteady-Correction*, in den oberen Gleichungen vernachlässigt [13, S.32].

2.2 Entdimensionalisierung

Um die Ergebnisse vergleichbar darstellen zu können, sollen alle Gleichungen entdimensionalisiert werden. Bei diesem Vorgehen werden die Referenzskalen für Länge, Zeit und Dichte gewählt und in die Gleichungen eingesetzt. Diese werden dann umgeformt, bis sie dimensionslos sind.

Mit der Einführung der Referenzgrößen werden zusätzliche Bezeichnungen der Variablen eingeführt. In diesem Abschnitt werden die dimensionslosen Größen mit Tilde-Zeichen bezeichnet. Um weitere Einführung von Zeichen zu unterbinden, sollen in folgenden Abschnitten alle Größen ohne Tilde-Zeichen als dimensionslos gelten.

Als Referenzskalen für Länge, Zeit und Dichte wird l , $T = 1/f$ und ρ gesetzt. Dabei ist l die Länge des Flügels (s. Abschn. 3.2) und T die Periode der oszillierenden Strömung. Alle drei Referenzgrößen haben den Wert Eins.

Betrachten wir als erstes die NSG. Die Berechnungen in dieser Arbeit enthalten eine oszillierende Strömung, deswegen eignet es sich für die charakteristische Geschwindigkeit $u_\infty = Af$ zu wählen, wo A die Amplitude und f die Frequenz der Anströmung sind [32]. Die dimensionslosen Größen sind dann entsprechend definiert als:

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{u_\infty}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{u_\infty}{l}t, \quad \tilde{\Pi} = \frac{\Pi}{u_\infty^2 \rho}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{u_\infty l}. \quad (2.39)$$

Eingesetzt in die *penalized* NSG ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{u_\infty^2}{l} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_\infty^2}{l} \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_k}{\partial \tilde{x}_j} \right]_{in} \tilde{\mathbf{u}}_n &= \\ &= -\frac{u_\infty^2}{l} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{u_\infty^2}{l} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} - \frac{u_\infty^2}{l} \chi \tilde{C}_\eta^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_i). \end{aligned}$$

Der Permeabilitätsparameter C_η hat die Einheit einer Zeit und kann als die Relaxationszeit interpretiert werden [13]. Die REYNOLDS-Zahl ist: $Re = u_\infty l / \nu$. Die noch dimensionsbehaftete kinematische Viskosität wird mit $u_\infty l$ von Einheiten befreit und die obere Gleichung mit l/u_∞^2 multipliziert. Das führt zu der dimensionslosen *penalized* NSG:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \tilde{t}} + \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_k}{\partial \tilde{x}_j} \right]_{in} \tilde{\mathbf{u}}_n = - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} - \chi \tilde{C}_\eta^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_i).$$

Als nächstes betrachten wir die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. Weitere dimensionslose Größen sind definiert als:

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{m}{\rho l^2}, & \tilde{F}_i &= \frac{F_i}{\rho l^3 f^2}, & \tilde{x}_s &= \frac{x_s}{l}, \\ \tilde{M} &= \frac{M}{\rho l^4 f^2}, & \tilde{J} &= \frac{J}{\rho l^4}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Diese und Gl. 2.39 eingesetzt in Gl. 2.29 und 2.30 ergeben:

$$\rho l^2 \tilde{m} \frac{\partial^2 \tilde{y}_s}{\partial \tilde{t}^2} \frac{u_\infty^2 l}{l^2} = \tilde{F}_2 \rho l^3 f^2 - \tilde{m} \rho l^2 g, \quad (2.41)$$

$$\tilde{J} \rho l^4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} \frac{u_\infty^2}{l^2} = \tilde{M} \rho l^4 f^2. \quad (2.42)$$

Nach einer Umformung ergibt sich:

$$\tilde{m} \frac{\partial^2 \tilde{y}_s}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{F}_2 \frac{l^2}{A^2} - \tilde{m} \frac{l}{A} \frac{g}{A f^2}, \quad (2.43)$$

$$\tilde{J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} \frac{A^2 f^2}{l^2} = \tilde{M} f^2. \quad (2.44)$$

Im Hinblick auf den Λ -Flieger und die Vergleichbarkeit wird der Parameterraum von [18] mit:

$$\beta = \frac{A}{l}, \quad \kappa = \frac{A f^2}{g}, \quad (2.45)$$

übernommen. Damit sehen die Gleichungen wie folgt aus:

$$\tilde{m} \frac{\partial^2 \tilde{y}_s}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{F}_2}{\beta^2} - \frac{\tilde{m}}{\beta \kappa}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{M}}{\beta^2}. \quad (2.47)$$

Die Untersuchungen in dieser Arbeit richten sich unter Anderem auf die Variation von κ und den halben Öffnungswinkel α . Die Variation von β ist weniger Interessant aus mehreren Gründen. Aus dieser Arbeit und aus anderen Veröffentlichungen [30], [18] ist bekannt, dass für das Schweben des Λ -Fliegers die an den Flügelkanten entstehenden Wirbel eine Rolle spielen. Für ein $\beta < 1$ sind die Wirbel kleiner als die Flügellänge, ihre Intensität reicht somit für das Schweben nicht aus. Und für ein $\beta > 1$ wird das Verhalten relativ schnell unabhängig von β [18]. Die referenzierte Studie für den Parameter β ist mit einer künstlichen Viskosität durchgeführt worden. Für den Fall eines viskosen Fluids können sich die Ergebnisse in Bezug auf die Variation von β unterscheiden.

Mit der Annahme, dass β geringen Einfluss auf des Schweben hat, wird in dieser Arbeit der Fall $\beta = 1$ untersucht. Die Gleichungen für den Körper haben dann entsprechend die Form:

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}_s}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{F}_1}{\tilde{m}}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}_s}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{F}_2}{\tilde{m}} - \frac{1}{\kappa}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{J}}. \quad (2.50)$$

Zum Schluss soll in diesem Abschnitt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit entdimensionalisiert werden:

$$\langle \mathbf{u}_2 \rangle = A f \pi \sin(2\pi f t). \quad (2.51)$$

Mit den Größen aus Gl. 2.39 ergibt sich:

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle_{u_\infty} = A f \pi \sin\left(2\pi \tilde{t} \frac{l}{u_\infty}\right), \quad (2.52)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle_{Af} = A f \pi \sin\left(2\pi f \tilde{t} \frac{l}{Af}\right), \quad (2.53)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle = \pi \sin(2\pi \tilde{t} \beta^{-1}), \quad (2.54)$$

$$\text{mit } \beta = 1 \quad \langle \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle = \pi \sin(2\pi \tilde{t}). \quad (2.55)$$

In weiteren Text wird das Tilde-Zeichen ausgelassen mit dem Verständnis, dass alle Größen dimensionslos sind.

2.3 Numerische Grundlagen

Die Methoden der Diskretisierung sind in diesem Unterabschnitt zu finden. Die Zeitableitungen in den Gleichungen werden mit RK2 gelöst und die Raumableitungen werden im FOURIER-Raum berechnet. Dabei wird eine schnelle FOURIER-Transformation (eng.: *Fast FOURIER Transform* (FFT) eingesetzt.

Das Fluid-Struktur-System ist in der Zeit gekoppelt und stellt somit eine weitere Anforderung an die Methode RK2. Dieser Sachverhalt ist ebenfalls erläutert. Des Weiteren sind hier die Bedingungen der Stabilität des Systems und die Randbedingungen (RB) des Systems beschrieben.

2.3.1 Diskretisierung der Zeitableitung

Die Bewegungsgleichungen des Fluids und des starren Körpers sind instationär und enthalten eine Ableitung nach der Zeit. Gleichungen dieser Art schreiben sich allgemein als:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{g}(t, \phi) \quad \text{mit: } \phi(t_0) = \phi_0. \quad (2.56)$$

Hierbei ist ϕ die in der Zeit transportierte Größe und $\hat{g}(t, \phi_0)$ die rechte Seite der Differentialgleichung (DGI). Meistens ist sie abhängig von ϕ und beinhaltet Differentialoperatoren.

Es gibt eine große Anzahl an Verfahren, mit Hilfe derer die Zeitableitung diskretisiert werden kann. Die bekanntesten sind die expliziten Runge-Kutta-Verfahren. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung wird oft angewendet, weil es stabil und relativ genau ist [24].

Trotzdem wird in dieser Arbeit RK2 benutzt, weil die VPM von der Konsistenzordnung $\mathcal{O}(\sqrt{C_\eta})$ ist [13]. Der RK4 wertet die rechte Seite vier mal aus und ist somit doppelt so teuer in der Rechenleistung als RK2.

Das zweistufige RK-Verfahren hat die Form [24, S.81]:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t(b_1 k_1 + b_2 k_2). \quad (2.57)$$

Dabei stellt ϕ^{n+1} die Lösung der Gleichung zum nächsten Zeitschritt und ϕ^n den Zustand von ϕ in der aktuellen Zeit dar. Die Koeffizienten k und b ergeben ausgeschrieben:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\hat{g}(t^n, \phi^n) + \underbrace{\hat{g}\left(t^{n+1}, \phi^n + \Delta t \hat{g}(t^n, \phi^n)\right)}_{\text{EULER-explicit}} \right]. \quad (2.58)$$

Somit wird der Wert zu der neuen Zeit durch eine sukzessive Auswertung der rechten Seite \hat{g} berechnet.

Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, wie diese Vorschrift in gekoppelten Systemen angewendet wird.

2.3.2 Systemkopplung in der Zeit

Das DGIS des Fluids und des Körpers stellen das Gesamtsystem dar. Damit die Konvergenzordnung von RK2 im gekoppelten System erhalten bleibt, soll die Vorschrift Gl. 2.58 für Fluid und Körper gekoppelt gelöst werden. Dies ist im Folgenden erläutert.

Für eine Erklärung wird in diesem Abschnitt die Größe ϕ_f^{n+1} eingeführt, welche den Lösungsvektor des ersten Systems im nächsten Zeitschritt repräsentiert. Entsprechend repräsentiert ϕ_k^{n+1} die Lösung des zweiten Systems. Die rechte Seite wird entsprechend mit $\hat{g}_f(t^n, \phi_f^n)$ und $\hat{g}_k(t^n, \phi_k^n)$ bezeichnet. In der Abb. 2.2 ist der Algorithmus zur Berechnung von Gl. 2.58 dargestellt. Um einen Zeitschritt

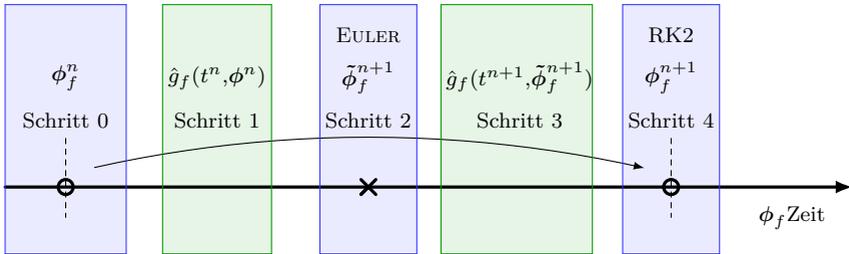


Abb. 2.2: Algorithmus für die Berechnung des RK2.

mit RK2 zu berechnen, werden die in Schritt 1 und 3 ausgewerteten \hat{g}_f genutzt. Im gekoppelten System müssen Informationen innerhalb eines RK2-Zeitschrittes zwischen den einzelnen Systemen ausgetauscht werden. In der Abb. 2.3 sind vertikal zwei Zeitlinien gezeichnet. Die linke repräsentiert die Lösung des Körpers ϕ_k und die rechte die Lösung des Fluids ϕ_f . Horizontal ist die Abbildung von oben nach unten in elf Ebenen aufgeteilt. Diese bilden auch die wesentlichen Arbeitsschritte im Programmcode ab.

Auf der ersten Ebene sind die Werte zur aktuellen Zeit und auf der untersten zum nächsten Zeitschritt mit RK2 berechnet. Dazwischen liegt der explizite EULER-Schritt. Der RK2 wird jeweils für ein Untersystem ϕ_f, ϕ_k gelöst, dafür werden die rechten Seiten \hat{g}_f, \hat{g}_k benötigt (s. Abb. 2.3). Deren Berechnung hängt vom Zustand des anderen Systems ab. Für das System ϕ_k wird die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Fluids benötigt und für das System ϕ_f entsprechend die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Körpers. Dieser Austausch von Daten ist in den Ebenen zwei, vier, sieben und neun angedeutet.

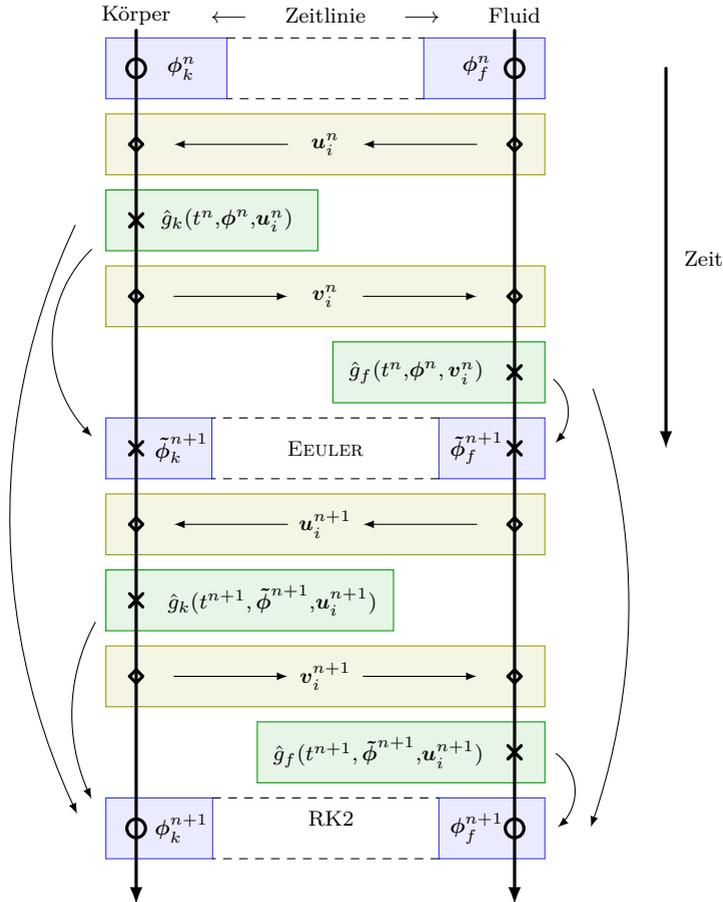


Abb. 2.3: Algorithmus für die Berechnung des RK2 für gekoppelte Systeme. Der Austausch der Daten kann parallel stattfinden. Damit sind jeweils die Ebenen zwei und vier sowie sieben und neun gemeint. Aufzählung beginnt von oben.

2.3.3 Diskretisierung der Raumbewegung

In dieser Arbeit wird die FOURIER-pseudospectral-Diskretisierung für zwei Dimensionen verwendet, wie auch bei [13]. Bei diesem Verfahren werden die Variablen als eine FOURIER-Serie dargestellt. Sei q eine beliebige zweidimensionale diskrete Größe (Geschwindigkeitskomponente, Druck.), dann ist sie durch die diskrete inverse Fouriertransformation beschrieben [8, S.97], [33, S.7], [13, S.36]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}_i) = \sum_{\mathbb{k}_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbb{k}_2=0}^{N_2-1} \hat{\mathbf{q}}(\mathbb{k}_i) \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\mathbb{k}_i\mathbf{x}_i}, \quad (2.59)$$

wo $\hat{\mathbf{q}}(\mathbb{k}_i)$ die Fourierkoeffizienten aus einer FFT(\mathbf{q}) sind. Dabei ist \mathbb{k}_i der Wellenvektor, der durch die Gitterstruktur bekannt ist. Die partiellen Ableitungen im Fourierraum berechnen sich dann mit Hilfe des Wellenvektors:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_i}{\partial \hat{x}_j} = \sqrt{-1} \mathbb{k}_j \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_j} = -1 |\mathbb{k}_i|^2 \hat{\mathbf{q}}. \quad (2.61)$$

Im Fourierraum werden nur die Differentialoperatoren ausgewertet. Durch die Transformation in den physikalischen Raum entstehen *Aliasing*-Fehler, welche durch die 2/3 Regel kompensiert werden [25, S.33].

Die Methode ist von Vorteil, weil der LAPLACE-Operator im FOURIER-Raum diagonal ist. Durch den effizienten FFT-Algorithmus, kann die Druckgleichung effektiv gelöst werden [13, S.36].

2.3.4 Randbedingungen

In diesem Abschnitt wird es um zwei Arten von RB gehen. Die ersten sind die RB des Kontrollvolumens und die zweiten liegen zwischen dem Körper und Fluid vor. Anschließend wird erklärt, wie die Bedingung einer oszillierenden Strömung modelliert wird.

Die FOURIER-Transformation impliziert automatisch die periodischen RB des Kontrollvolumens [8, S.93], [12, S.7]. Für eine Simulation einer freien Strömung eignet sich die FOURIER-pseudospectral-Diskretisierung somit gut. Die Ränder des Kontrollvolumens müssen trotzdem behandelt werden, weil Wirbelpaare das Fluidsystem nicht verlassen können. Diese müssen gedämpft werden, um ihren durch die Periodizität induzierten Wiedereintritt zu verhindern.

Es soll kurz erwähnt werden, wie die Wirbelstärke am Rand des Kontrollvolumens gedämpft wird. Eine ausführlichere Erklärung kann hier [13, S.33f] nachgeschlagen werden.

Um den Sachverhalt einfacher darzustellen, wird der Term, der für das Dämpfen zuständig ist, als \mathbf{D}_i bezeichnet und entsprechend in den weiteren Formeln verwendet.

Die Wirbeldämpfung stellt mit sich ebenfalls einen *Penalizati-on*-Term, bei dem der Permeabilitätsparameter C_{sp} meistens auf 10^{-1} gesetzt wird dar. Dieser Term beinhaltet eine Maske, welche die Geometrie des Gebiets beschreibt. Für die Berechnung von \mathbf{D}_i wird mit der POISSON-Gleichung die Stromfunktion ψ gefunden, mit deren Hilfe die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten gebildet werden:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{D}_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_i} = \frac{\chi_{sp}}{C_{sp}}\omega. \quad (2.64)$$

Widmen wir nun unsere Aufmerksamkeit kurz der zweiten Art der RB. Die VPM wurde für ein Problem mit Haftbedingung am Körper bewiesen [2]. Diese treten direkt an der Diskontinuität der Maskenfunktion χ auf und sollen nicht mehr weiter besprochen werden.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit u_∞ ist die nullte Mode in der FOURIER-Serie. Diese kann auch direkt auf einen zeitabhängigen

Wert gesetzt werden [13, S.34]. Die nullte Mode befindet sich an der Stelle, wo:

$$|\mathbb{k}_i| \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow (x_{0m}, y_{0m}) : \text{diskrete Position}, \quad (2.65)$$

$$\langle \mathbf{u}_2 \rangle = \mathbf{u}_2(x_{0m}, y_{0m}) = \pi \sin(2\pi t). \quad (2.66)$$

2.3.5 Stabilität

Die Stabilität des gekoppelten Systems ist von mehreren Parametern abhängig. Für eine stabile Rechnung darf ein bestimmter Wert des Zeitschrittes nicht überschritten werden. Dieser ist dynamisch programmiert und wird mit folgend beschriebenen Bedingungen in jedem Schritt neu berechnet.

Die notwendige Bedingung ist die COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Zahl (CFL-Zahl):

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t |\mathbf{u}_i|_{max}}{\Delta x} < 1. \quad (2.67)$$

Mit notwendig ist gemeint, dass bei $\text{CFL} > 1$ das System definitiv instabil ist. In dieser Arbeit wurde ermittelt, dass das gestellte Problem für $\text{CFL} \leq 0,4$ stabil bleibt.

Die zweite notwendige Bedingung ist durch den *Penalization*-Term mit $\Delta t \leq C_\eta$ gegeben. Somit ergibt sich mit beiden Bedingungen der maximal mögliche Zeitschritt [13, S.38]:

$$\Delta t \leq \left(C_\eta, \text{CFL} \frac{\Delta x}{|\mathbf{u}_i|_{max}} \right), \quad \text{CFL} \leq 0,4. \quad (2.68)$$

2.4 Passive Transformation

In diesem Unterkapitel werden die Grundlagen der linearen Algebra, mit deren Hilfe die Transformation der Geometrie-Elemente durchgeführt wird, gezeigt. Es gibt eine aktive und eine passive Transformation [16, S.36f].

Die aktive Transformation ist eine Abbildung, bei der der Vektor um einen Winkel bezüglich des Koordinatenursprungs gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird. Die Rotationsmatrix ist in dem rechtsdrehenden Koordinatensystem wie folgt definiert:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Der Vektor \boldsymbol{x} hat im Inertialsystem \mathbb{F} die Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x, y)$

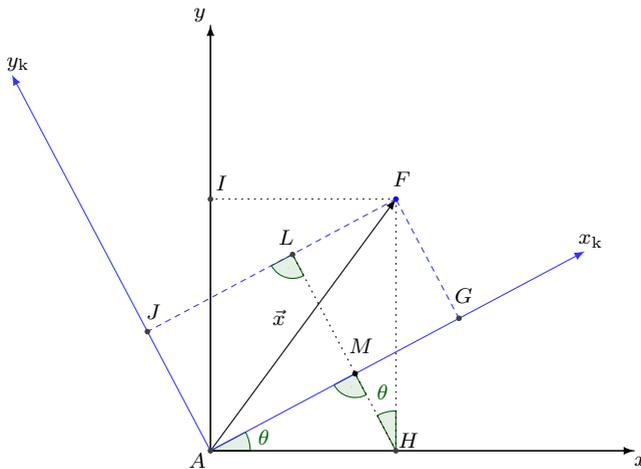


Abb. 2.4: Passive Transformation eines Vektors.

und wird mit $R_{ij}(\theta)$ rotiert:

$$\tilde{x}_i = R_{ij}(\theta)x_j. \quad (2.70)$$

In dieser Arbeit jedoch wird der Festkörper im körpereigenen Koordinatensystem \mathbb{K} beschrieben. Somit wird eine passive Transformation erforderlich sein. Der gleiche Vektor \boldsymbol{x} hat dann in diesem System die Koordinaten $\boldsymbol{x}' = (x_k, y_k)$. Bei der passiven Transformation wird das Koordinatensystem rotiert, dies ist in der Abb. 2.4 anhand eines Vektors erklärt.

Das Ziel ist es, den in \mathbb{K} rotierten Vektor $\mathbf{x}' = (x_k, y_k)$ (in der Abb. als Strecke \overline{AF}) durch die Koordinaten (x, y) in \mathbb{F} auszudrücken. Aus der Abb. 2.4 ist zu sehen:

$$\overline{AH} = x; \quad \overline{AI} = y; \quad \overline{AG} = x_k; \quad \overline{AJ} = y_k, \quad (2.71)$$

Zuerst wird die x_k -Komponente betrachtet:

$$\overline{AG} = \overline{JF} = \overline{JL} + \overline{LF}; \quad (2.72)$$

mit

$$\overline{JL} = \overline{AM} = x \cos(\theta), \quad (2.73)$$

$$\overline{LF} = y \sin(\theta), \quad (2.74)$$

ergibt sich:

$$x_k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta). \quad (2.75)$$

Die y_k ergibt sich wie folgt:

$$\overline{AJ} = \overline{FG} = \overline{LH} - \overline{MH}; \quad (2.76)$$

mit

$$\overline{LH} = y \cos(\theta), \quad (2.77)$$

$$\overline{MH} = x \sin(\theta), \quad (2.78)$$

ergibt sich:

$$y_k = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta). \quad (2.79)$$

Die Rotation des Vektors \vec{x} , beschrieben in körpereigenen Koordinatensystem, ist dann:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

$$x'_i = R_{ij}^{-1}(\theta)x_j. \quad (2.81)$$

Somit ist bei der Drehung des Koordinatensystems die Inverse der Drehmatrix zu verwenden.

Wie in der Abb.2.4 angedeutet, haben die Koordinatensysteme den

selben Ursprung. Meistens ist dies nicht der Fall und die Geometrie-Elemente sollen um einen beliebigen Punkt rotiert werden, z. B. um den Schwerpunkt. Solches Vorgehen beinhaltet translatorische Transformationen (Tr). Dabei werden die Koordinaten des Rotationspunktes in den Ursprung des Inertialsystems verschoben, rotiert und dann zurück verschoben.

Sei $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Die Transformationsabbildung $V(\theta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat dann die Form:

$$V(\theta) = Tr(\mathbf{c}) \circ R(\theta)^{-1} \circ Tr(-\mathbf{c}). \quad (2.82)$$

Weiterhin wird für die Transformation der Geometrie des starren Körpers die Abbildung $V(\theta)$ verwendet. Ihre Anwendung ist im Kapitel 3 erklärt.

3 Modellierung des Λ -Fliegers

Im Kapitel 2 wurden die mathematischen Grundlagen in Einzelheiten besprochen. In diesem Kapitel werden diese Grundlagen genutzt, um das DGIS der FSI aufzustellen. Ferner werden alle Aspekte der Modellierung des Λ -Fliegers behandelt, die dazu beitragen, das dynamische FSI-System zu lösen. Im letzten Unterabschnitt wird erklärt, wie die Berechnungsgeschwindigkeit durch einen adaptiv begrenzten Rechenraum des Λ -Fliegers erhöht werden konnte.

3.1 Mathematisches Modell

In diesem Abschnitt wird das DGIS aufgestellt, welches die FSI eines starren Körpers in dem Gravitationsfeld beschreibt. Das DGIS ist hier allgemein für einen Körper beliebiger Form beschrieben. Die Definition der Geometrie des Λ -Fliegers wird dann in weiteren Abschnitten konkretisiert.

Für die Diskretisierung des Problems wird ein rechtwinkliges Rechengitter verwendet, weil die FOURIER-Transformation nur mit solchen Gittern arbeitet. Auf diesem Gitter wird das Fluid gelöst. Der Festkörper wird mit dem *Penalization*-Term beschrieben. Dieser Term enthält eine Maske χ , welche die geometrischen Eigenschaften des Festkörpers charakterisiert. Die VPM erlaubt es, ein einziges Rechengitter zu verwenden, und umgeht somit die Problematik der Gittergenerierung. Dabei handelt es sich um die Notwendigkeit bei jedem Zeitschritt jeweils ein Gitter für das Fluid und den Festkörper aufzubauen [5].

In der Abb. 3.1 ist das Modell des Gesamtsystems skizziert. Das Fluid Ω_f , der Festkörper Ω_k und das Wirbeldämpfgebiet Ω_s sind periodisch in x und y -Richtung. Des Weiteren ist die Position von Ω_s relativ zu dem Inertialsystem (x, y) abhängig von der Zeit, und ist an den Schwerpunkt von Ω_k gebunden. Dies stellt sicher, dass, unabhängig von der Position des Körpers im Kontrollvolumen, der Abstand, ab dem die Wirbel gedämpft werden, konstant bleibt. Dieser Abstand entspricht der halben Länge der Größe des Kontrollvolumens.

In der Abb. 3.1 ist bei dem Festkörper die Glättungsschicht angedeutet. Diese ist mindestens drei Zellen dick und bildet ein Teil des Körpermaske χ . Durch sie werden die Kräfte und Momente genauer berechnet. Der Verlauf dieser Größen über die Zeit wird durch die Glättungsschicht geglättet und weist weniger Rauschen auf [21].

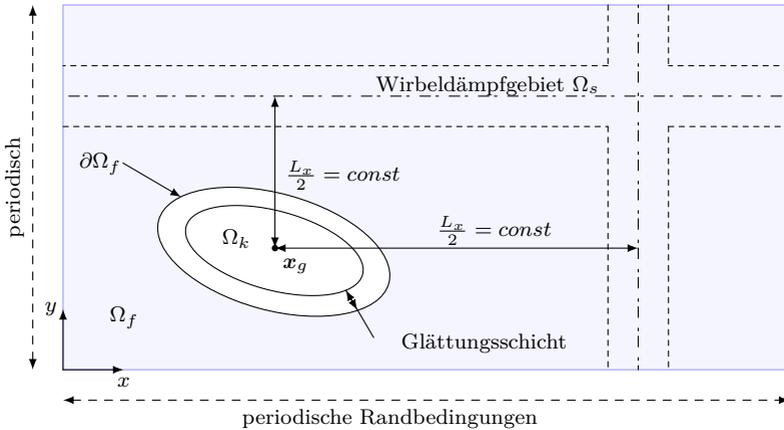


Abb. 3.1: Skizze zur Erläuterung des mathematischen Modells.

Im Kapitel 2 sind einzelne Systemkomponenten beschrieben. Für die Modellierung des Λ -Fliegers in oszillierender Strömung wird das folgende Gleichungssystem aufgestellt, bestehend aus:

NSG:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n &= \\ &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\chi}{C_\eta} (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) - \mathbf{D}_i, \end{aligned} \quad (3.1)$$

MB:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2)$$

Gleichung für den Druck:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_l \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \left[\varepsilon_{jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} \right]_{in} \mathbf{u}_n - \frac{\chi}{C_\eta} (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) \right), \quad (3.3)$$

Linearer Impuls und Drehimpuls für den Körper:

$$\frac{\partial^2 x_{s,i}}{\partial t^2} = \frac{F_i}{m} - G_i, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{M}{J}, \quad G_i = (0, 1/\kappa)^T, \quad (3.4)$$

aerodynamische Kräfte:

$$F_i = \int_{\Omega_s} \frac{\chi}{C_\eta} (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) dV, \quad M = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{jk} r_j \frac{\chi}{C_\eta} (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k) dV. \quad (3.5)$$

mit den Bedingungen:

$$\mathbf{u}_i|_{\partial\Omega_s} = \mathbf{v}_i, \quad \langle \mathbf{u}_2 \rangle = \pi \sin(2\pi t). \quad (3.6)$$

Dieses System wird gekoppelt mit den RK2 gelöst. Der Algorithmus ist in der Abb. 2.3 erklärt.

3.2 Definition von Parametern des Fliegers

In dieser Arbeit werden starre Körper untersucht, welche die Form eines Hütchens haben. Das sind zweidimensionale Objekte, die im dreidimensionalen Raum eine hohle Pyramide approximieren (s. Abb. 3.2).

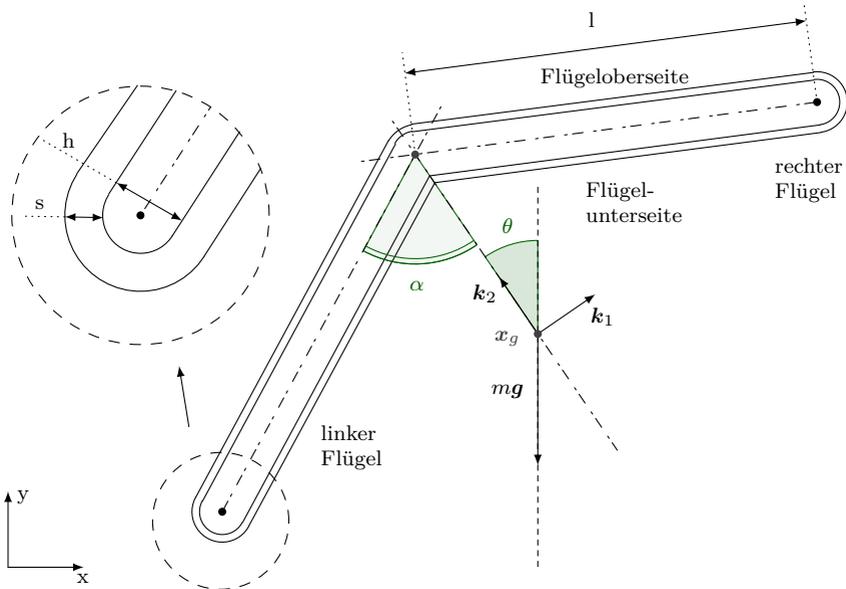


Abb. 3.2: Definition von Parametern des Fliegers.

Der Λ -Flieger verfügt über eine Symmetrieachse, auf der sich sein Schwerpunkt x_g befindet. Die Flügel bilden mit der Symmetrieachse jeweils einen Öffnungswinkel α . Dieser Winkel kann Werte zwischen 0 und $\pi/2$ annehmen. Bei dem zweiten handelt es sich um einen geraden Stab. Der kleinste Winkel, mit dem gerechnet wurde, beträgt 10° .

Die Position des Schwerpunktes ist abhängig von α und liegt nur für große Winkel innerhalb des Körpers. Im Schwerpunkt greift die

Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ an, dort liegt auch das körpereigene Koordinatensystem \mathbb{K} des Fliegers. Der Winkel, den der Vektor \mathbf{k}_2 mit der Gewichtskraft bildet, ist der Lagewinkel θ . Er beschreibt auch die Neigung des Fliegers relativ zu dem Inertialsystem \mathbb{F} . Bei $\theta = 0$ liegt die Symmetrieachse koaxial zu dem Vektor der Gewichtskraft, dabei zeigt die Spitze des Fliegers nach oben.

Die beiden Flügel haben eine Flügeloberseite, deren Normalenvektoren in die positive y -Richtung zeigen, und eine Flügelunterseite entsprechend. Sie haben eine Länge l und sind an der Flügelspitze abgerundet. Diese Maßnahme soll starke Diskontinuität in der Lösung vorbeugen.

Die Dicke der Flügel ist h . Das Verhältnis der Flügellänge zu der Flügeldicke ist in dieser Arbeit immer kleiner als 0,08. Zum Vergleich hat ein A4-Blatt Papier einen Dicke-zu-Länge-Quotient von ca. 0,0005. Das kleinste Verhältnis, mit welchem gerechnet wurde, beträgt 0,04. Es wurde jedoch nicht untersucht welches Verhältnis h/l als das kleinstmögliche für einen starren Körper physikalisch realisierbar ist. Die Autoren von [30] können eine gute Genauigkeit für ein Verhältnis kleiner als 0,06 nicht garantieren.

Für eine genauere Berechnung der auf den Flieger wirkenden aerodynamischen Kräfte wird in dieser Arbeit eine Glättungsfunktion benutzt. In der Abb. 3.2 ist diese mit einer dünnen Schicht der Dicke s angedeutet. Diese ist in dem diskreten Raum durch eine feste Anzahl von Gitterpunkten definiert und strebt mit steigender Anzahl an Gitterpunkten gegen Null.

Das Körperinnere wird durch eine beschränkte Anzahl an Gitterpunkten aufgelöst. In Abhängigkeit von der Gesamtanzahl der Gitterpunkte des Kontrollvolumens und dem Verhältnis h/l wird die effektive Dicke des Flügels h durch eine finite Anzahl an Gitterpunkten aufgelöst. Die Anzahl der Gitterpunkte für h war nie kleiner als zehn.

3.3 Trägheitsmoment

In diesem Abschnitt sind alle Größen für Beweis Zwecke dimensionsbehaftet und werden zum Schluss entdimensionalisiert.

Das Trägheitsmoment J eines starren Körpers wird bezüglich der Rotationsachse angegeben. In dieser Arbeit sind alle Körper zweidimensional und haben nur eine Rotationsachse. Für solch einen Körper mit konstanter Dichte ρ_k ist das Trägheitsmoment definiert als [7, S.199f]:

$$J = \rho_k \int_{\Omega_s} |r_i|^2 dV. \quad (3.7)$$

Um das Trägheitsmoment des Λ -Fliegers zu berechnen wird angenommen, dass die Flügeldicke ausreichend klein und somit vernachlässigbar ist, also $h \ll l$. Somit vereinfacht sich die Geometrie auf zwei Stäbe. Das Trägheitsmoment eines Stabes bezüglich seines Schwerpunktes ist dann [7, S.205]:

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{12}. \quad (3.8)$$

In der Abb. 3.3 ist der approximierte Λ -Flieger dargestellt. Der

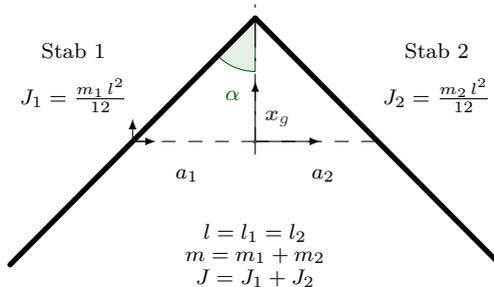


Abb. 3.3: Skizze der approximierten Geometrie für die Berechnung des Trägheitsmoments.

Schwerpunkt des ganzen Fliegers lässt sich leicht bestimmen. „Bei zweiteiligen Körpern (Flächen, Linien) liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungsstrecke der Teilschwerpunkte und unterteilt diese

im umgekehrten Verhältnis der Gewichte (Flächeninhalte, Linienlängen) der beiden Teile.“[6, S.243]

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{l_1}{l_2} = 1, \quad (3.9)$$

$$a_1 = a_2 = \frac{l}{2} \sin(\alpha). \quad (3.10)$$

Das Trägheitsmoments des ersten Stabes bezüglich des Koordinatensystems des Fliegers bestimmt sich mit dem Satz von STEINER:

$$J_1 = J_1 + m_1 a_1^2 \quad (3.11)$$

$$= \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 \frac{l^2}{4} \sin^2(\alpha) \quad (3.12)$$

$$= \frac{m_1 l^2}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} [1 - \cos^2(\alpha)] \right) \quad (3.13)$$

$$= \frac{m_1 l^2}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\alpha) \right). \quad (3.14)$$

Und das Trägheitsmoment des Fliegers:

$$J = J_1 + J_2 \quad (3.15)$$

$$= \frac{l^2}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\alpha) \right) (m_1 + m_2) \quad (3.16)$$

$$= \frac{m l^2}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\alpha) \right). \quad (3.17)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Resultat der anderen Forscher überein [18]. Die Entdimensionalisierung mit Gl. 2.40 ergibt:

$$J = \frac{m}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\alpha) \right). \quad (3.18)$$

3.4 Relation der Koordinatensysteme

In diesem Abschnitt geht es um die verwendeten Koordinatensysteme und deren Beziehung zueinander. Die folgenden Erklärungen haben außerdem einen starken Bezug zu der Implementierung des Fliegers und können das Verstehen des Programmcodes erleichtern.

Die Koordinatensysteme werden an einem Flieger, deren Flügel aus dünnen Stäben bestehen, erklärt. Das Inertialsystem \mathbb{F} , in dem das Fluid gelöst wird, hat die Basisvektoren $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Das Koordinatensystem des Fliegers \mathbb{K} hat die Basisvektoren $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. Das Koordinatensystem des linken Flügels \mathbb{L} mit $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ und des rechten \mathbb{R} mit $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ sind entsprechend bezeichnet. In der Abb. 3.4 ist eine Explosionszeichnung des Fliegers schrittweise dargestellt. Diese Reihe an Abbildungen soll erklären, wie die Abb. 3.5 zustande kommt. In der Abb. 3.5 ist ein vereinfachter Λ -Flieger abgebildet. Sein halber Öffnungswinkel ist α , und der Lagewinkel ist θ .

Die Bewegung des Schwerpunktes von dem Flieger wird in \mathbb{F} mit RK2 berechnet. Die Koordinaten der Flügel in \mathbb{F} können durch die Lage des Schwerpunktes, α und θ beschrieben werden.

Das Transformationsgesetz für Punktkoordinaten bezüglich der Basis \mathbf{f}_i ist definiert als [29, S.42]:

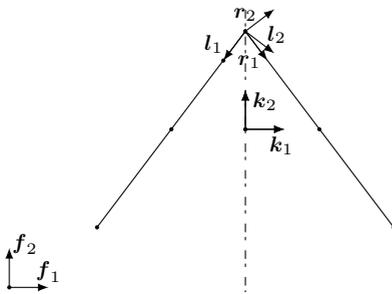
$$\tilde{x}_i \mathbf{f}_i = \left[R_{ij}^{-1}(x_j - c_j) \right] \mathbf{f}_i, \quad (3.19)$$

wo c_j der Translationsvektor zwischen den Systemen ist.

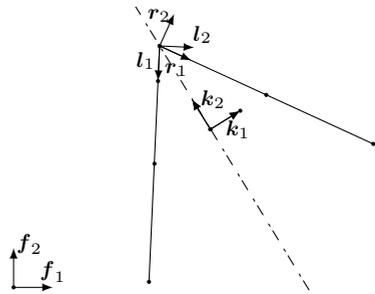
Um die Punktkoordinaten in das \mathbb{L} zu transformieren, werden als erstes die Koordinaten von \mathbb{F} in die Spitze \mathbb{S} des Fliegers transformiert, und dann mit der Abbildung $V(\theta)$ (s. Gl.2.82) um den Schwerpunkt rotiert. Der Abstand zum Rotationspunkt wird dabei in \mathbb{S} angegeben:

$$\mathbb{S} = \mathbb{L} \quad \text{bei } \theta = 0, (\text{s. Abb. 3.4c}) \quad (3.20)$$

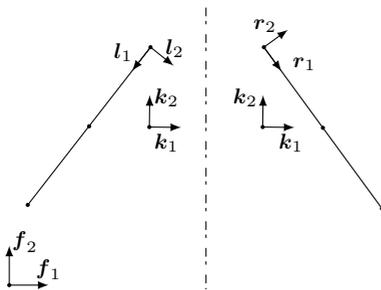
$$\overline{\mathbb{F}}_{(\mathbb{L})} = \frac{l}{2} \cos(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{l}_1 + \frac{l}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{l}_2. \quad (3.21)$$



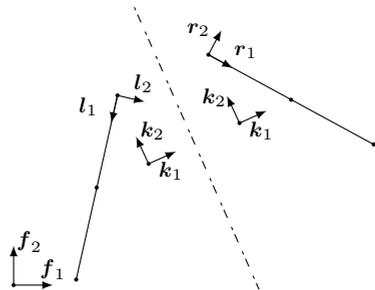
(a) Lage der Koordinatensysteme bei $\theta = 0$. Flieger ist zusammengesetzt dargestellt.



(b) Lage der Koordinatensysteme bei $\theta > 0$. Flieger ist zusammengesetzt dargestellt.



(c) Lage der Koordinatensysteme bei $\theta = 0$. Flügel sind an der Symmetrielinie auseinandergesogen.



(d) Lage der Koordinatensysteme bei $\theta > 0$. Flügel sind an der Symmetrielinie auseinandergesogen.

Abb. 3.4: Explosionszeichnung des vereinfachten Λ -Fliegers zur Veranschaulichung der Relation von Koordinatensystemen.

Der Translationsvektor zum \mathbb{S} in \mathbb{F} ist:

$$\mathbb{S} = \mathbb{L} \quad \text{bei } \theta = 0, \quad (3.22)$$

$$\overline{OI} = \overline{OF} + \overline{FI} \quad (3.23)$$

$$= x_{G,1} \mathbf{f}_1 + x_{G,2} \mathbf{f}_2 + 0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{l}{2} \cos(\alpha) \mathbf{f}_2. \quad (3.24)$$

Das Transformationsgesetz für Punktkoordinaten nach Gl. 3.19 ist

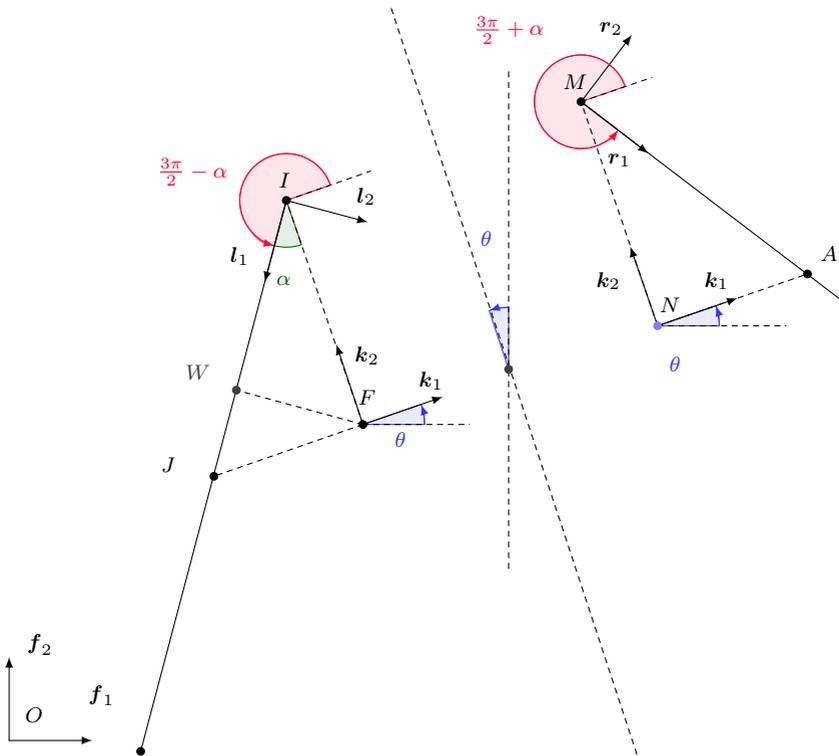


Abb. 3.5: Detaillierte Skizze der Koordinatensysteme. Es ist nur ein Teil des rechten Flügels zu sehen.

mit $\alpha_1 = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ (s. Abb. 3.5) dann:

$$\tilde{x}_i \mathbf{f}_i = \left[R_{ij}^{-1}(\alpha_1)(x_j - (\overline{OI})_j) \right] \mathbf{f}_i \quad \text{bei } \theta = 0. \quad (3.25)$$

Und durch Rotation mit θ um \mathbf{x}_g ergeben sich die Punktkoordinaten des linken Flügels in \mathbb{F} :

$$\tilde{x}_{(L)}^i = R_{ij}^{-1}(\theta) \left[R_{jk}^{-1}(\alpha_1) \left[x_k - (\overline{OI})_{(F)k} \right] - (\overline{IF})_{(L)k} \right] + (\overline{IF})_{(L)j}. \quad (3.26)$$

Analog werden die Punktkoordinaten für den rechten Flügel konstru-

iert. Mit $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + \alpha$:

$$\tilde{x}_i = R_{ij}^{-1}(\theta) \left[R_{jk}^{-1}(\alpha_2) \left[x_k - \underbrace{(\overline{OI})_k}_{(\mathbb{F})} \right] - \underbrace{(\overline{IF})_k}_{(\mathbb{R})} \right] + \underbrace{(\overline{IF})_j}_{(\mathbb{R})}, \quad (3.27)$$

mit

$$\overline{IF} = \frac{l}{2} \cos(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{r}_1 - \frac{l}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{r}_2. \quad (3.28)$$

Die Gl. 3.27 und Gl. 3.26 werden benutzt, um die Punktkoordinaten in die KOS'e der Flügel zu transformieren. Nach der Transformation kann die Maske leicht konstruiert werden.

3.5 Maskenfunktion

Mit der Maskenfunktion ist die im Programmcode implementierte Funktion gemeint. Ihre Aufgabe besteht darin, die Maske $\chi(x_i, t)$ zu bauen. Die Maske des Λ -Fliegers kann aus einfachen geometrischen Objekten zusammengesetzt werden. Dabei werden Kreise und Rechtecke verwendet.

Die Kreisgleichung mit Radius gleich eins lautet:

$$f_{\text{kr}}(x, y) = x^2 + y^2 - 1. \quad (3.29)$$

Die Maske für den Kreis lautet somit:

$$\chi_{\text{kr}} = \begin{cases} 1, & f_{\text{kr}}(x, y) \leq 0, \\ 0, & f_{\text{kr}}(x, y) > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Ein rechtwinkliges Viereck der Länge l und der Dicke h hat vier Kanten. Jede dieser Kanten kann durch eine Gleichung beschrieben werden. Durch die Bildung der konvexen Hülle [31] können diskrete

Punkte, welche innerhalb des Vierecks liegen, bestimmt werden.

$$\text{linke Kante. Menge } A : f_l(x,y) = -x - 0.5l + x_c, \quad (3.31)$$

$$\text{rechte Kante. Menge } B : f_r(x,y) = x - 0.5l - x_c, \quad (3.32)$$

$$\text{untere Kante. Menge } C : f_u(x,y) = -y - 0.5h + y_c, \quad (3.33)$$

$$\text{obere Kante. Menge } D : f_o(x,y) = y - 0.5h - y_c, \quad (3.34)$$

wo der Vektor (x_c, y_c) den geometrischen Schwerpunkt des Vierecks beschreibt. Die konvexe Hülle entsteht dann durch die Bildung der Schnittmenge von Punkten, die durch die jeweiligen Gleichungen beschrieben sind (s. Abb. 3.6):

$$\text{conv}(S) = A \cap B \cap C \cap D. \quad (3.35)$$

Die Maske für ein rechtwinkliges Viereck ist dann:

$$\chi_{\text{eck}} = \begin{cases} 1, & \text{conv}(S) \leq 0, \\ 0, & \text{conv}(S) > 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Die Bestimmung der konvexen Hülle ist immer dann nötig, wenn die diskreten Punkte gesucht sind, welche innerhalb von Körpern liegen. Im zweidimensionalen Fall kann ein Körper durch ein konvexes Polygon beschrieben werden, das viel mehr Kanten haben kann, als ein Viereck in Fall des Fliegers. Um alle Punkte direkt zu prüfen ist dann langsam. Dies kann z. B. mit den *Quickhull*-Algorithmus schneller verrichtet werden [15, S.64ff].

3.5.1 Diskontinuierlich

Die diskontinuierliche Maske setzt sich aus zwei rechtwinkligen Vierecken, welche die Flügel abbilden, und drei Kreisen, welche die Kanten abrunden, zusammen (s. Abb. 3.7). In dieser Abbildung ist die Komposition des Λ -Fliegers aus einzelnen Masken veranschaulicht.

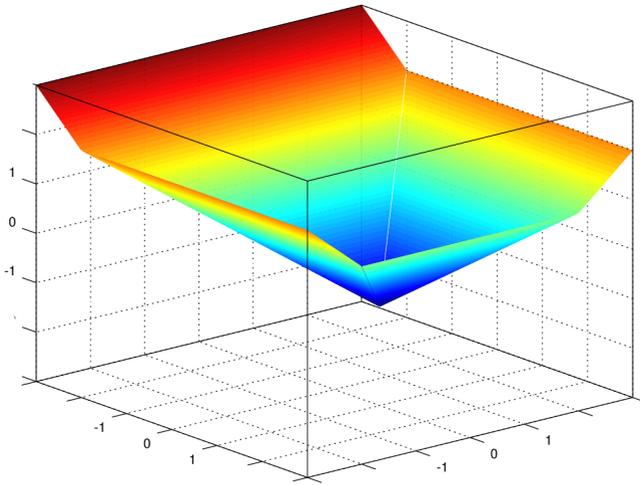


Abb. 3.6: Konvexe Hülle, gebildet aus einem rechtwinkligen Viereck. Sie wird für die Konstruktion der Maske benutzt. Der geometrische Mittelpunkt liegt bei $(1,1)$.

Die Maske χ_d bildet sich aus der Vereinigung aller Untermasken:

$$\chi_d = \chi_{kr1} \cap \chi_{kr2} \cap \chi_{kr3} \cap \chi_{eck1} \cap \chi_{eck2}. \quad (3.37)$$

Der Rand der Maskenfunktion weist einen Sprung auf. Dieser soll behandelt werden, um eine ausreichend glatte Bewegung des Körpers zu erreichen.

3.5.2 Geglättet

Die Glättungsschicht bildet einen glatten Übergang vom Wert Eins nach Null in der Maske χ_d . Dieser Übergang wird durch die Cosinusfunktion beschrieben (s. Abb. 3.8).

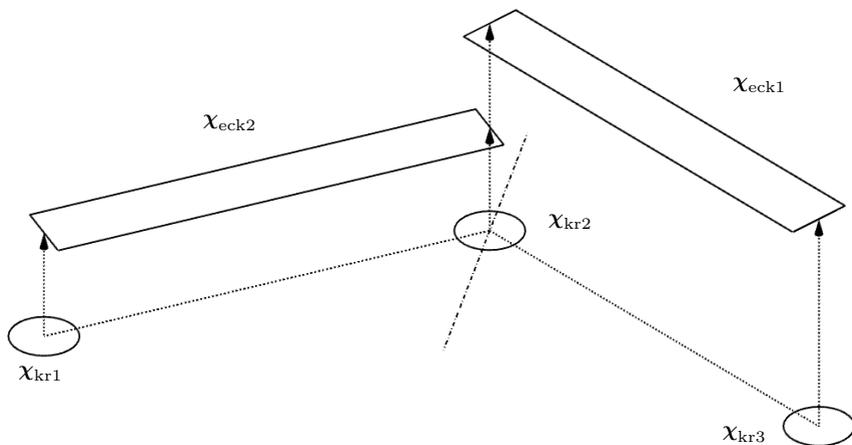
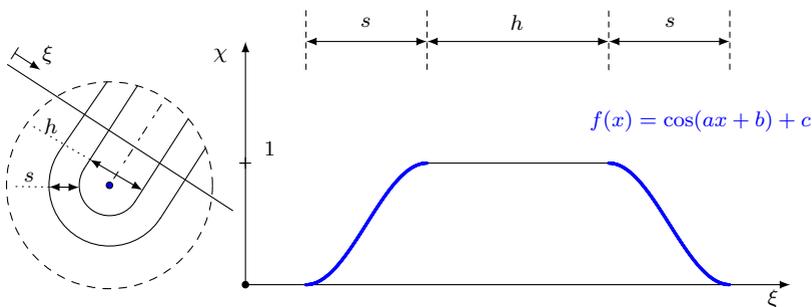


Abb. 3.7: Komposition der diskontinuierlichen Maske χ_d des Λ -Fliegers.



s. Abb. 3.2

Abb. 3.8: Skizze zur Erklärung der Glättungsschicht. Die Koordinate ξ geht senkrecht durch den Flügel. Links in der Abbildung ist die abgerundete Spitze eines Flügels dargestellt.

In \mathbb{R}^2 haben die Funktionen folgende Gestalt:

$$f_{\text{ring}}(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_1 \right) \frac{\pi}{s} \right] \quad (3.38)$$

für den Kreisring mit dem Innenradius $R_1 = h/2$ und dem Außenra-

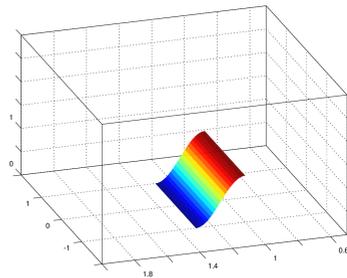
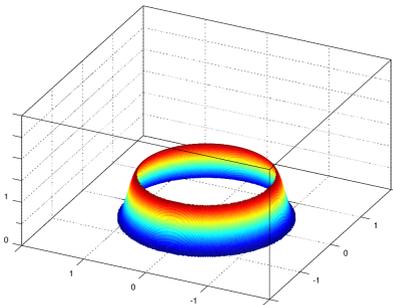
dius $R_2 = R_1 + s$.

$$f_{\text{vier}}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[\left(y^2 - \frac{h}{2} \right) \frac{\pi}{s} \right] \quad (3.39)$$

beschreibt die Glättungsschicht für den Bereich entlang der Flügelkante. Der Definitionsbereich dieser Funktionen wird durch die entsprechenden Masken definiert. Plot der Gl. 3.38 und Gl. 3.39 ist in der Abb. 3.9 gezeichnet.

Um die geglättete Maske χ zu generieren werden 12 Untermasken erstellt (s. Abb. 3.10). Bei der logischen Vereinigung der Masken werden Stellen der Überschneidung am selben Ortspunkt dann mehrere Werte annehmen. Der Maximalwert wird dann genommen. Das ermöglicht einen glatten Übergang zu erreichen:

$$\chi = \max \left(\bigcap_{i=1}^{12} \chi_i \right) \quad (3.40)$$



(a) Glättungsfunktion auf einem Kreisring.

(b) Glättungsfunktion auf einem rechteckigen Viereck.

Abb. 3.9: Darstellung der einzelnen Funktionsverläufe, aus denen sich die Glättungsschicht zusammensetzt.

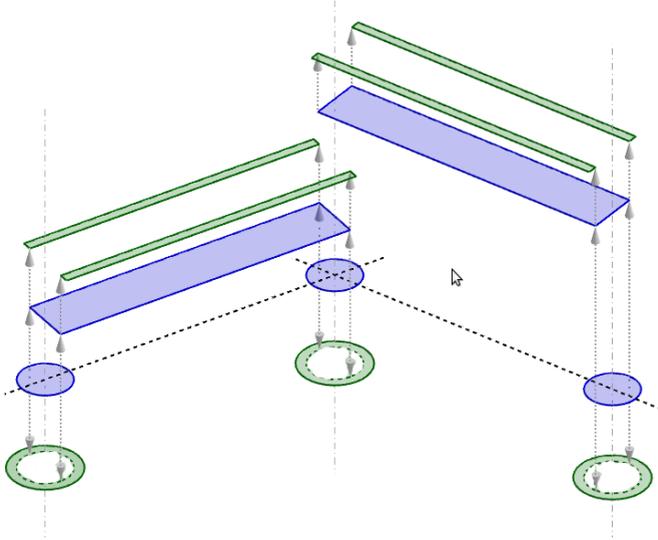


Abb. 3.10: Komposition der geglätteten Maske χ des Λ -Fliegers. Die blauen Bereiche haben den Wert Eins. In den grünen Bereichen wird die entsprechende Glättungsfunktion aufgestellt.

3.6 Adaptiv begrenzter Rechenraum

Bei dem adaptiv begrenzten Rechenraum handelt es sich um einen Bereich im Kontrollvolumen, in dem sich der Λ -Flieger befindet. Die Größe dieses Bereichs ist durch die Packmasse des Fliegers beschrieben. In der englischsprachigen Literatur heißt dieser Bereich *Bounding Volume* (BV) [15, S.75].

Für die Berechnung des Moments, der Kräfte und der Geschwindigkeitskomponente des Λ -Fliegers ist es effizienter, nur das BV zu betrachten. Dieser kann in jedem Zeitschritt einfach bestimmt werden.

Das BV des Λ -Fliegers ist durch zwei Punkte (F und E) definiert und stellt mit sich ein rechtwinkliges Viereck, das den Flieger umschließt, dar (s. Abb. 3.11). Die Position der Eckpunkte (A , B , C) des Fliegers ist bekannt. Deswegen berechnen sich die zwei Punkte des BV's wie

folgt:

$$x_F = \min(x_A, x_B, x_C), \quad (3.41)$$

$$x_E = \max(x_A, x_B, x_C), \quad (3.42)$$

$$y_F = \min(y_A, y_B, y_C), \quad (3.43)$$

$$y_E = \max(y_A, y_B, y_C). \quad (3.44)$$

Die Berechnung der Kräfte findet dann mit einer Schleife statt, die nur über die Indizes, welche das BV beschreiben, läuft und nicht über das ganze Kontrollvolumen.

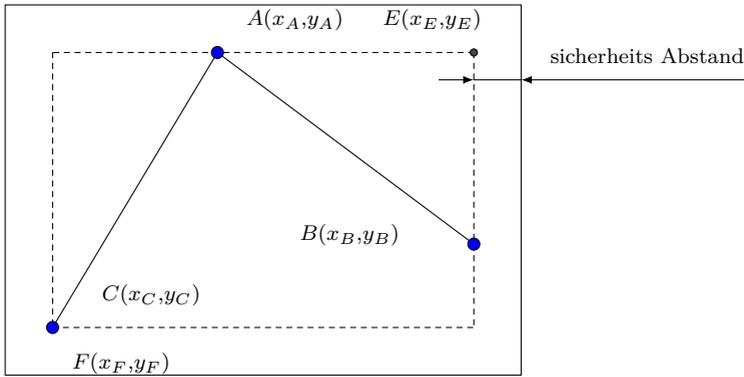


Abb. 3.11: Skizze zur Erläuterung des adaptiv begrenzten Rechenraums.

4 Validierung des Lösers

In diesem Kapitel sind Ergebnisse unterschiedlicher Experimente, welche die Korrektheit der Implementierung des Programmcodes nachweisen, wiedergegeben. Sie bestätigen die Ordnung der Zeit- und Raumdiskretisierung und veranschaulichen den Einfluss der Randbedingungen auf den Λ -Flieger. Einen weiteren Nachweis der korrekten Implementierung erbringen die Plausibilitätstests zur Relaxation des Impulses. Zum Schluss des Kapitels wird gezeigt, dass ein Zustand des stationären Schwebens eintritt, wenn der Λ -Flieger mit seiner Fallgeschwindigkeit angeströmt wird.

4.1 Experimentelle Konsistenzordnung

Die experimentelle Konsistenzordnung kann aus einer Reihe von Resultaten numerischer Simulationen bestimmt werden. Sie bietet die Möglichkeit das Fehlerverhalten in Abhängigkeit von den Parametern der Diskretisierung zu untersuchen. Die Parameter sind: der Zeitschritt Δt und der Abstand zwischen den Gitterpunkten $\Delta x = \Delta y$. Entsprechend dem Verfahren der Diskretisierung ist in Experimenten eine bestimmte Konsistenzordnung zu erwarten.

In diesem Abschnitt werden Normen beschrieben, mit deren Hilfe der Fehler bestimmt werden kann. Für die Auswertung der Norm wird der Vektor als Element von \mathbb{R} betrachtet. Der Lösungsvektor ist aber ein Element von \mathbb{R}^2 . Deswegen wird zur Berechnung des Fehlers der Lösungsvektor in die Form von \mathbb{R} umsortiert.

Um zu bestimmen, in welchem Maß sich die Lösungen u_i^N von der u_i^{ex} unterscheiden, wird eine p -Norm benutzt. Für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ ist diese definiert als:

$$\|u_i\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}. \quad (4.1)$$

Der Index p liegt im Bereich $1 \leq p < \infty$ und gibt an, um welche Norm es sich handelt: $\|u_i\|_2$ ist die bekannte euklidische Norm. Es

können entsprechend der Gl. 4.1 unterschiedliche Normen konstruiert werden. Wird $p = \infty$ gesetzt, entsteht die Maximumnorm [3, S.15]:

$$\|u_i\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} (u_i). \quad (4.2)$$

Für die experimentelle Untersuchung der Konsistenzordnung wird die Maximumnorm benutzt, weil diese den betragsmäßig maximalen Wert im Lösungsraum angibt. Damit beistimmt sich der relative Fehler δ_N für eine Ebene der Diskretisierung wie folgt:

$$\delta_N = \frac{\|u_i^{ex} - u_i^N\|_\infty}{\|u_i^{ex}\|_\infty}. \quad (4.3)$$

Für die beiden Experimente (Parameter Δt und Δx) ist der Aufbau

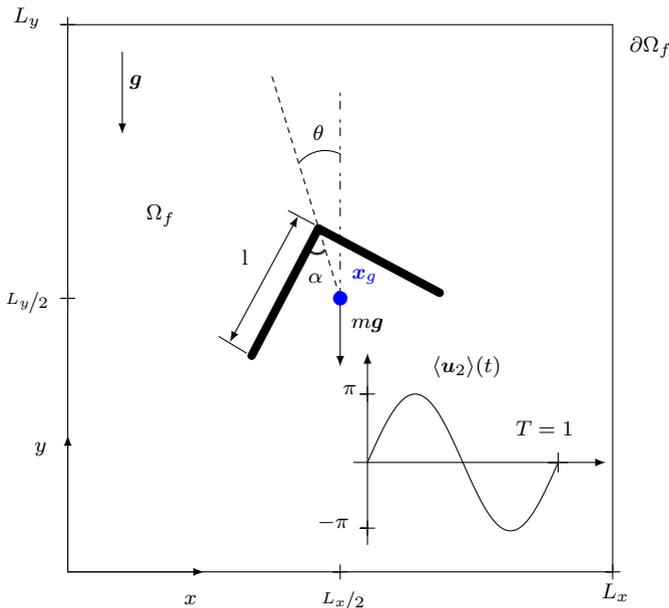


Abb. 4.1: Aufbau der numerischen Simulation für die Bestimmung der Konsistenzordnung.

der Simulationen ähnlich und ist in Abb. 4.1 skizziert. Die Experimente erforschen das Verhalten des Λ -Fliegers unter der Gravitation

in einer oszillierenden Strömung. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Validierung des Lösers. Die Parameter des Lösers sind in der Tab. 4.1 zusammengefasst. Weiter im Text sind die Ergebnisse aus den numerischen Experimenten dargestellt.

Tab. 4.1: Parameter der Simulationen für die Bestimmung der Konsistenzordnung. (Std 1) ist die Studie zu der Variation des Zeitschritts und (Std2) ist die Studie zu der Variation des Gitterabstandes.

Parameter	Std 1	Std 2	Parameter	Std 1	Std 2
$N_x = N_y$	800	{256; 4096}	α	$\pi/4$	$\pi/4$
T_{end}	1	2	$L_x = L_y$	4	6
ν	0,01	0,01	Re	100	100
m	8	8	Δt	{ 10^{-4} ; 10^{-5} }	10^{-4}
h/l	0,07	0,07	C_{sp}	10^{-2}	10^{-1}
κ	1	1	$\langle \mathbf{u}_1 \rangle$	0	0
k	0,16	0,16	$\langle \mathbf{u}_2 \rangle$	$\pi \sin(2\pi t)$	$\pi \sin(2\pi t)$
(x_s, y_s)	(2,2)	(3,3)	θ_{start}	2°	2°
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0	0

4.1.1 Ordnung der Zeitdiskretisierung

Für die Ermittlung der Ordnung der Zeitdiskretisierung wird bei einer konstanten Raumauflösung von 800^2 Punkten der Zeitschritt für jede weitere Rechnung halbiert. Dabei werden innerhalb einer Rechnung die übrigen Parameter konstant gehalten. Der Fehler wird dann mit der Gl. 4.1 berechnet. Zu betonen ist, dass der Λ -Flieger dabei nicht festgehalten wird, und, dass das System gekoppelt ist.

Das Ergebnis ist in der Abb. 4.2 gezeigt. In dem logarithmischen Diagramm sind zwei Linien, welche die Steigung der ersten und zweiten Ordnung verdeutlichen, gezeichnet. Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen, dass die Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung ist. Damit entspricht diese der theoretischen Ordnung des Verfahren von RUNGE-KUTTA 2-ter Ordnung (RK2) [24].

Im Laufe dieser Studie wurde erkannt, dass die zweite Ordnung in der Zeitdiskretisierung ab einer Raumauflösung von ca. 500^2 Punkten eintritt. Unter diesem Wert wird mindestens die erste Ordnung

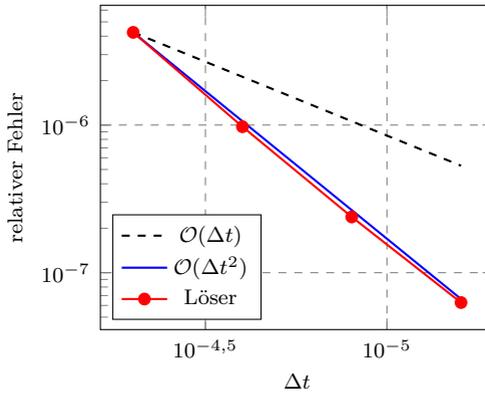


Abb. 4.2: Ordnung der Zeitdiskretisierung für das gekoppelte System. Der relative Fehler ist durch die numerischen Experimente bestimmt. Die Lösung mit der feinsten Gitterauflösung wird als die exakte Lösung herangezogen.

erreicht. Es ist außerdem eine minimale Rechendauer $t = 1$ nötig, damit sich das System auf dem *Penalization*-Term einstellt. Es konnte nicht festgestellt werden, dass sich die zweite Ordnung unter der benötigten minimalen Rechendauer einstellt.

4.1.2 Ordnung der Raumdiskretisierung

Für die Ermittlung der Ordnung der Raumdiskretisierung wird bei einem konstanten Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-4}$ die Anzahl der Raumpunkte vergrößert und somit das $\Delta x = \Delta y$ für jede weitere Rechnung verkleinert. Dabei werden innerhalb einer Rechnung alle weiteren Parameter konstant gehalten.

Der Fehler wird dann mit der Gl. 4.1 berechnet. Damit die Lösungen die gleiche Anzahl an Punkten haben und vergleichbar sind, werden die hochaufgelösten Lösungen auf das Ergebnis 256^2 projiziert. Dabei werden die Vergleichspunkte, also die Punkte, die die selben Raumkoordinaten haben, beibehalten und die restlichen, welche durch die höhere Auflösung entstehen, gelöscht. Das Resultat der Studie ist in der Abb. 4.3 gezeigt.

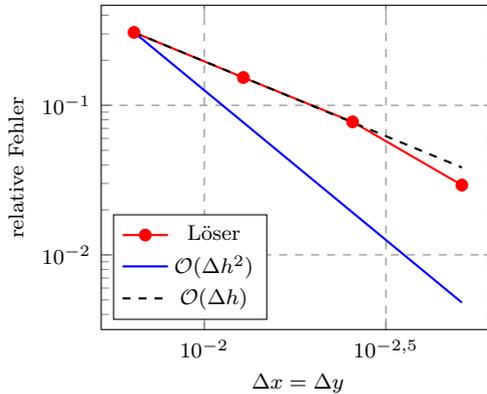


Abb. 4.3: Ordnung der Raumdiskretisierung für das gekoppelte System. Der relative Fehler ist durch die numerischen Experimente bestimmt. Die Lösung mit der feinsten Gitterauflösung wird als die exakte Lösung herangezogen.

In dem logarithmischen Diagramm sind zwei Linien eingezeichnet, welche die Steigung der ersten und zweiten Ordnung verdeutlichen. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass die Raumdiskretisierung erster Ordnung ist. Die Raumableitungen wurden mit Hilfe von spektralen Methoden diskretisiert, welche eine viel höhere Ordnung aufweisen [9]. Dies ist laut der Abb. 4.3 nicht der Fall und ist damit begründet, dass der *Penalization*-Term die Konsistenzordnung verschlechtert [13]. Die positive Konsequenz ist, dass der Löser in Hinblick auf die Raumdieskretisierung trotzdem konvergiert.

Im Laufe dieser Studie wurde außerdem festgestellt, dass für Auflösungen kleiner als 256^2 die Konvergenz nicht gegeben ist. Die Rechnung mit der feinsten Auflösung von 4096^2 Punkten auf einem Kontrollvolumen der Größe 6×6 entspricht einem $\Delta x = 0,00146$. Die notwendigen Parameterstudien erfordern viel Rechenzeit, weswegen die Simulationen in den Grenzen von 1024^2 und 4096^2 Punkten durchgeführt wurden. Weitere Validierungstests in den nächsten Abschnitten geben mehr Informationen über die Wahl der angemessenen Parametergrößen.

4.2 Einfluss der Randbedingungen

Die Randbedingungen für das Fluid im Kontrollvolumen sind periodisch. Die auf Grund der Oszillationen des Fluids entstehenden Wirbel verlassen das Gebiet nicht. Somit können sie erneut Einfluss auf den Λ -Flieger ausüben, was nicht der physikalischen Realität entspricht. Wie in Abschn. 2.3.4 beschrieben, werden die Wirbel am Rand des Kontrollvolumens gedämpft.

Zudem wirken die Wirbel auch in Abstand auf den Flieger, da sie Geschwindigkeit im Punktraum induzieren. Je weiter vom Wirbelzentrum, um so geringer der Einfluss. In dieser Studie soll festgestellt werden, in welchem Abstand vom Λ -Flieger die Wirbel gedämpft werden sollen, um möglichst physikalisches Verhalten des Gesamtsystems zu erhalten.

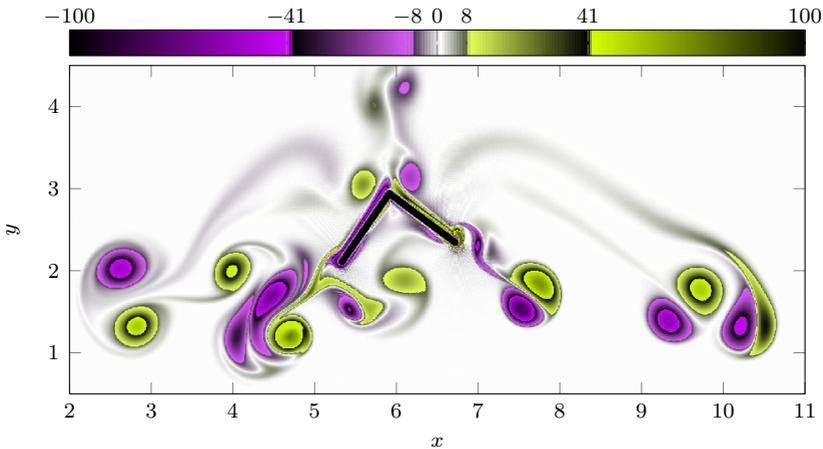


Abb. 4.4: Darstellung der Wirbelstärke um den Λ -Flieger in einer oszillierenden Strömung bei $Re = 300$. Lösung zur Zeit $t = 4$. Die Farbskala ist angepasst, die maximale Wirbelstärke beträgt 416 und liegt an der rechten Flügelspitze.

Am Anfang jeder Simulation befindet sich das Fluid in Ruhe. Erst nach einiger Zeit entwickelt sich ein komplexes System aus Wirbelpaaren (s. Abb. 4.4). Die Lebensdauer der Wirbel ist abhängig von

der Viskosität, sodass für höhere REYNOLDS-Zahlen, also für kleinere Viskositäten, ein anderes dynamisches System entsteht.

Es wird eine Parameterstudie durchgeführt, um den Einfluss der Randbedingungen zu studieren. Die konstanten Parameter in der Studie sind so gesetzt, dass der Λ -Flieger unter der Gravitation in einer oszillierenden Strömung fällt.

Variiert wird die Größe des Kontrollvolumens. Es wird dabei darauf geachtet, dass $\Delta x = 0,0078125$ bei jeder Simulation eingehalten wird. Dies stellt sicher, dass das Resultat der Rechnung unabhängig von dem Fehler der Raumdiskretisierung ist. Denn, wie im Abschnitt 4.1.2 gezeigt, fällt der Fehler für $\Delta x \rightarrow 0$ mit der ersten Ordnung ab. Dementsprechend soll die Anzahl der Gitterpunkte verändert werden:

$$L = L_x = L_y = \Delta x \cdot N. \quad (4.4)$$

In der Abb. 4.5 ist die y -Komponente der auf den Λ -Flieger wirkenden Kraft über die Zeit bei $Re = 100$ dargestellt. Zur einer späteren Zeit

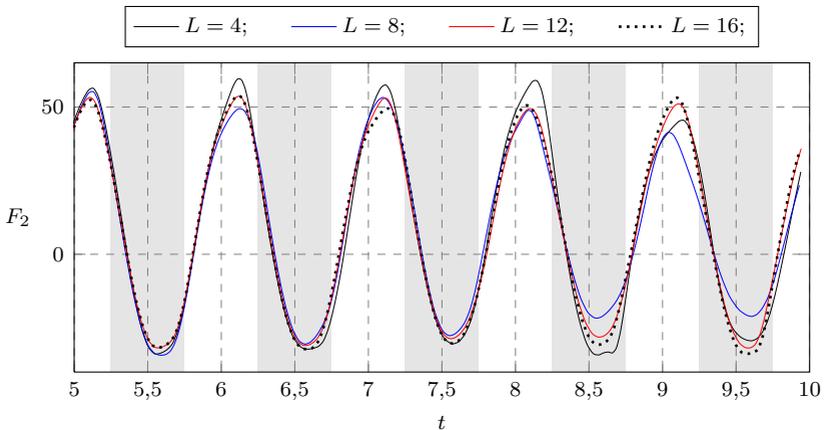


Abb. 4.5: Die auf den Λ -Flieger in y -Richtung wirkende aerodynamische Kraft in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens. Bei $t = \{5; 10\}$ ist kein wesentlicher Unterschied zu beobachten. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der das Fluid in die negative y -Richtung beschleunigt.

$t = \{5; 10\}$ ist eine deutliche Veränderung in der Kraft festzustellen.

Die Verläufe der Kurven liegen nicht übereinander und zeigen auch keinen Trend in Abhängigkeit von L . Es ist jedoch definitiv eine Auswirkung der Randbedingungen festzustellen.

In Hinblick auf die wirkende Kraft ist keine deutliche Konvergenz zu dem Kontrollvolumen mit Seitenlänge $L = 16$ zu erkennen. Zur weiteren Untersuchung ist die Position des Fliegers in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens in Abb. 4.6 dargestellt. Die Auswirkung ist hier deutlicher zu erkennen. Bis $L = 12$ ist eine

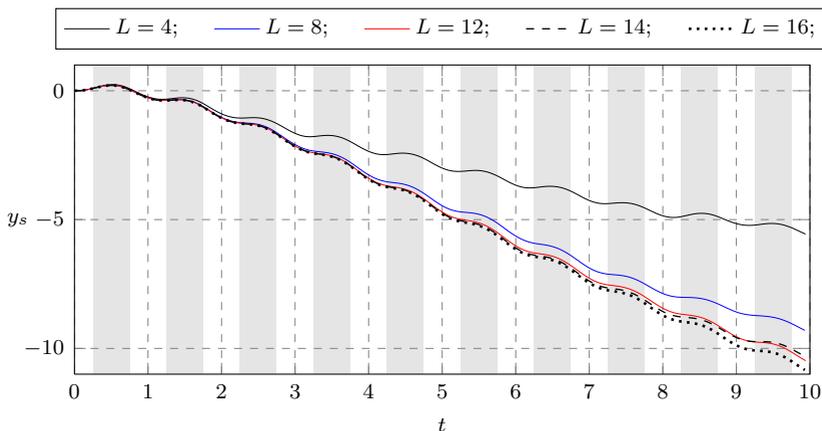


Abb. 4.6: Die Höhenlage des Λ -Flieger in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens. Die Höhenlage ist bezogen auf die Startposition. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der das Fluid in die negative y -Richtung strömt.

ausgeprägtere Abhängigkeit der Lösung von der Größe des Kontrollvolumens zu erkennen. Ab $L = 12$ ändert sich die Endposition des Λ -Fliegers nur gering und variiert im Bereich $\Delta y_s = 0,5$.

Die in diesem Abschnitt gestellte Fragestellung wäre nur zum Teil beantwortet, wenn die Viskosität nicht berücksichtigt worden wäre. Deswegen wird die Variation des Kontrollvolumens für zwei REYNOLDS-Zahlen durchgeführt: 100, 500. Um das zu visualisieren, wird für jede Größe des Kontrollvolumens $\{4; 6; 8; 10; 14; 16\}$ die mittlere Fallgeschwindigkeit in der Zeit von $t = 2$ bis $t = 10$

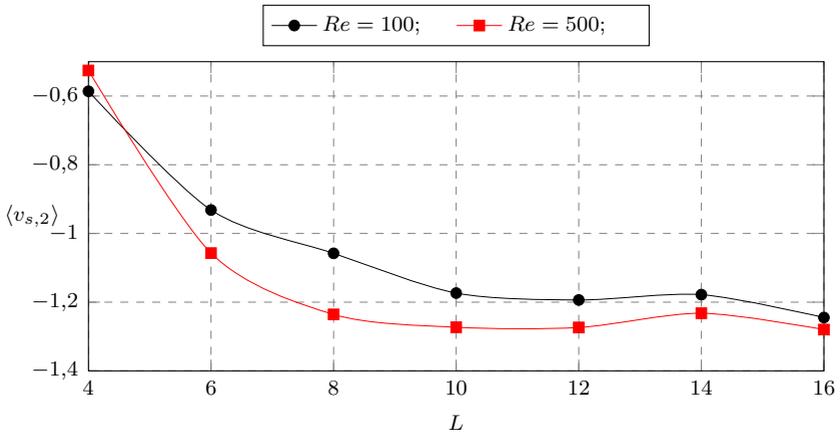


Abb. 4.7: Die mittlere Geschwindigkeit des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von der Größe des Kontrollvolumens und der REYNOLDS-Zahl.

berechnet:

$$\langle v_{s,2} \rangle = \frac{1}{T_{\text{end}}} \int_{t_0}^{T_{\text{end}}} v_{s,2}(t) dt. \quad (4.5)$$

In der Abb. 4.7 ist das Ergebnis der Studie präsentiert. Für beide REYNOLDS-Zahlen ist festzustellen, dass für größeres L beide Verläufe näherungsweise zu einem Wert von $\langle v_{s,2} \rangle = -1,25$ tendieren. Die Kurve für $Re = 500$ fällt schneller ab als für $Re = 100$. Bei der Größe des Kontrollvolumens $L > 12$ ist keine relevante Änderung der Fallgeschwindigkeit in beiden Fällen zu sehen. Für $L < 10$ ist eine wesentliche Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Kontrollvolumen und der REYNOLDS-Zahl zu beobachten.

Mit dieser Studie wurde gezeigt, dass die Randbedingungen einen großen Einfluss auf die Bewegung des Fliegers haben. Des Weiteren kann festgehalten werden, dass die optimale Größe des Kontrollvolumens ca. $L = 11 \times l$ beträgt.

4.3 Plausibilitätstests

Die Plausibilitätstests sollen die Kinematik des starren Körpers im Fluid überprüfen. Dabei geht es primär um das natürliche Verhalten eines Körpers im Fluid, welches ohne weiteres in der Umwelt zu beobachten ist.

Es ist zu erwarten, dass der sich im Fluid bewegende Körper auf Grund des Widerstandes und Reibung nach einiger Zeit zur Ruhe kommt, wenn keine weiteren Kräfte auf ihn wirken und das Fluid in Ruhe ist.

Bei einem sich bewegenden Körper ist neben der zeitlichen Änderung des linearen Impulses I_i auch eine zeitliche Änderung des Drehimpulses $L_{c,i}$ vorhanden. In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse zur Untersuchung des linearen Impulses in y -Richtung dargestellt. Da die Rechnung zweidimensional ist, gibt es auch nur eine Drehachse, für die der Drallsatz gelöst wird. Allgemein lässt sich aus den aerodynamischen Kräften die zeitliche Änderung des Impulses und die daraus folgende Position des Körpers bestimmen:

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \sum F_i, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial t} = \sum M. \quad (4.7)$$

In den folgenden Tests wird jeweils eine dieser Gleichungen im Programm ausgeschaltet, sodass die zeitliche Änderung null ist und die Lösung von der Größe (I oder L_c) entkoppelt wird. Das gibt die Möglichkeit das Verhalten der anderen Größe zu betrachten. In der Abb. 4.8 ist der grundlegende Aufbau der Simulationen skizziert.

Physikalisch ist es so zu verstehen, dass, wenn Gl. 4.6 null gesetzt wird, der Körper in x - und y -Richtung statisch bestimmt ist und nur auf Grund der wirkenden Momente rotieren kann. Und wenn Gl. 4.7 null gesetzt wird, kann der Körper sich nur translatorisch bewegen.

Die zwei Experimente werden ähnlich durchgeführt. Am Anfang $t_0 = 0$ befinden sich der Körper und das Fluid in Ruhe. Der Körper

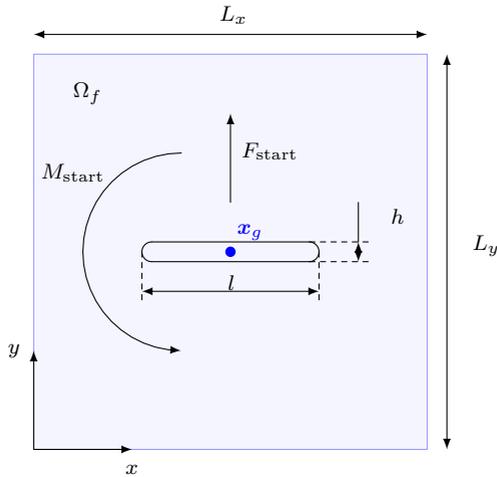


Abb. 4.8: Skizze der Simulation für die Plausibilitätstests. Keine Gravitation, periodische Randbedingungen mit dem sich bewegenden Wirbel-dämpfgebiet.

wird dann bis $t_1 = 1$ konstant beschleunigt und nach $t_1 = 1$ wird die Beschleunigung ausgeschaltet. Die Ergebnisse der Versuche sind in folgenden Unterkapiteln präsentiert.

4.3.1 Relaxation des linearen Impulses

Für dieses Experiment ist die Änderung des Drehimpulses auf Null geschaltet. Der starre Körper kann sich nur translatorisch bewegen. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 4.8 skizziert. Als Erstes wird untersucht, wie sich der Körper mit Anfangsbeschleunigung \tilde{a} im ruhenden Fluid verhält.

In Abb. 4.9 ist der Verlauf der Geschwindigkeitskomponente bei drei unterschiedlichen Anfangsbeschleunigungen des Körpers in y -Richtung über die Zeit dargestellt. In allen drei Fällen kommt der Körper nach einiger Zeit zum Stehen. Dieses Verhalten ist angemessen. Bei allen drei Versuchen war die Bewegung in x -Richtung marginal.

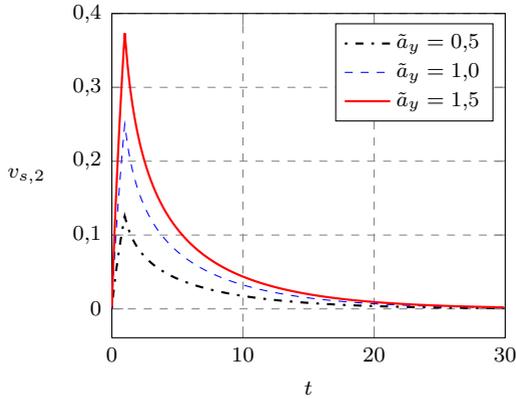


Abb. 4.9: Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des linearen Impulses in Abhängigkeit von der Anfangsbeschleunigung a_y . Sie wirkt auf den Körper von $t = 0$ bis $t = 1$ und wird danach auf Null gesetzt.

Das Experiment wird jetzt wiederholt. Diesmal wird jedoch die Viskosität variiert und die Anfangsbeschleunigung gleich gelassen. In Abb. 4.10 ist das Ergebnis dargestellt. Auch bei diesem Versuch ist die

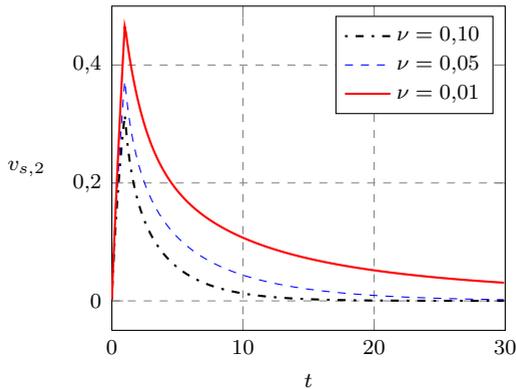


Abb. 4.10: Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des linearen Impulses in Abhängigkeit von der Viskosität. Die Beschleunigung wirkt auf den Körper von $t = 0$ bis $t = 1$ und wird danach auf Null gesetzt.

Änderung der Geschwindigkeit nachzuvollziehen. Denn für größere

Viskosität ist eine schnellere Abbremsung des Körpers zu erwarten, weil die Reibung im Fluid größer ist. Für das $\nu = 0,01$ kommt der Körper ca. bei $t = 70$ zum Stehen. Bei allen drei Versuchen war die Bewegung in x -Richtung marginal.

4.3.2 Relaxation des Drehimpulses

Für dieses Experiment ist die Änderung des linearen Impulses auf Null gesetzt. Der starre Körper kann sich nur um seinen Schwerpunkt \mathbf{x}_g rotieren. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 4.8 skizziert.

Die Abb. 4.11 zeigt die Ergebnisse dieser Studie. Bei größerer Winkelbeschleunigung erreicht der Körper höhere Winkelgeschwindigkeiten zum $t = 1$. Unabhängig davon wird in allen drei Fällen die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers durch die Reibung im Fluid auf Null abgebremst.

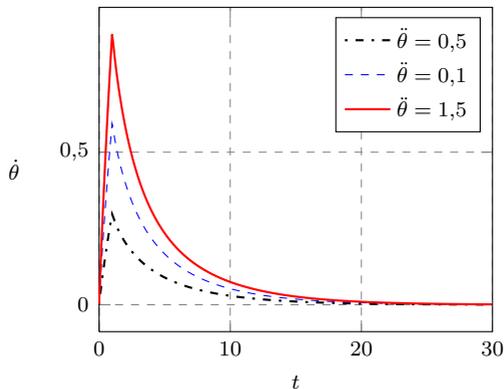


Abb. 4.11: Ergebnis des Plausibilitätstests auf Relaxation des Drehimpulses in Abhängigkeit von der Anfangswinkelbeschleunigung. Sie wirkt auf den Körper von $t = 0$ bis $t = 1$ und wird danach auf Null gesetzt.

Zusammenfassend haben die Plausibilitätstests gezeigt, dass eine zu erwartende Relaxation des Impulses stattfindet. Die dem Körper aufgebrachte kinetische Energie wird von dem Fluid durch Druckwiderstand und Reibung abgebaut. Das Gesamtsystem kommt nach

einer Anfangsanregung in einen Gleichgewichtszustand, den Ruhezustand. Alle Lösungsvariablen weisen ein ausreichend glattes Verhalten auf, und keine außerordentlichen Anregungen sind zu beobachten.

4.4 Zustand des stationären Schwebens

Es ist allgemein bekannt, dass ein Gegenstand im freien Fall auf Grund des Luftwiderstandes eine Grenzgeschwindigkeit erreicht und nicht mehr beschleunigt wird. Wenn nun der Körper mit dieser Geschwindigkeit angeströmt wird, ist zu erwarten, dass ein Zustand des stationären Schwebens eintritt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich der Löser entsprechend dieser theoretischen Überlegung verhält.

Dieses Experiment besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird ein frei gewählter Λ -Flieger mit seinem spitzen Ende in Richtung der Gravitation frei gelassen (s Abb. 4.12). Diese Ausrichtung ist gewählt worden, damit eine größere Stabilität bezüglich des wirkenden Moments erreicht werden kann. Wenn der Körper seine Winkellage ändert, kann nicht garantiert werden, dass der gleiche Drall beim Anströmen wieder wirken wird. Es wird so lange gerechnet, bis ein stationärer Zustand eintritt und die Fallgeschwindigkeit konstant bleibt. Im zweiten Teil wird der selbe Λ -Flieger mit dieser ermittelten Geschwindigkeit angeströmt.

In beiden Simulationen sind die Parameter sehr ähnlich, diese sind in der Tab. 4.2 zusammengefasst. Die Berechnungen werden bei einer kleinen REYNOLDS-Zahl und mit geringer Raumaufösung angestellt. Wie im Abschnitt 4.1.1 durch ein Experiment gezeigt, kann bei dieser Auflösung nicht die zweite Ordnung in der Zeitdiskretisierung erreicht werden. Trotzdem, werden die Ergebnisse zeigen, dass es für dieses Experiment ausreichend ist.

4.4.1 Grenzgeschwindigkeit beim freien Fall

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse der Berechnung präsentiert. Die entsprechenden Simulationsparameter sind in der Tab. 4.2 und

Tab. 4.2: Parameter der Simulationen für die Studie zum Zustand des stationären Schwebens. (Sim 1) ist die Simulation des freien Falls und (Sim 2) ist die Simulation des Anströmens. Alle Größen sind entdimensionalisiert.

Parameter	Sim 1	Sim 2	Parameter	Sim 1	Sim 2
$N_x = N_y$	256	256	α	$\pi/6$	$\pi/6$
T_{end}	20	40	$L_x = L_y$	4	4
ν	0,01	0,01	Re	100	100
m	1	1	CFL	0,4	0,4
h/l	0,08	0,08	C_{sp}	10^{-1}	10^{-1}
κ	-1	-1	$\langle u_1 \rangle$	0	0
k	0,2	10^{-3}	$\langle u_2 \rangle$	0	1,4639
(x_s, y_s)	(2,2)	(2,2)	θ_{start}	π	π
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0	0

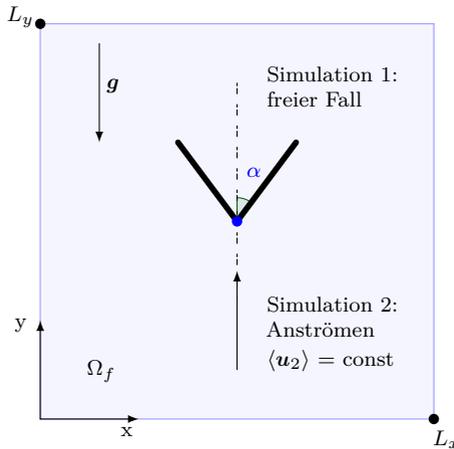
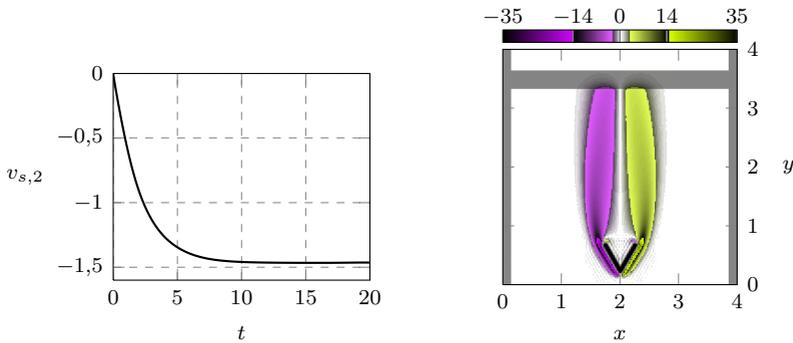


Abb. 4.12: Skizze der Simulationen zur Überprüfung des Zustandes des stationären Schwebens. Fluid und Körper sind periodisch im Kontrollvolumen. Der Vorticity sponge bewegt sich mit Körper.

die Skizze in der Abb. 4.12 zu finden. In der Abb. 4.13b ist die Wirbelstärke zu sehen. Die Strömung um dem Flieger verhält sich stationär. Hinter dem Körper entsteht ein Wirbelpaar. Die Wirbel werden leicht gedämpft. Die Extrema der Wirbelstärke liegen an den Spitzen der Flügel. In dem Bereich der Flügeloberseite ergibt



(a) Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung, aufgetragen über die Zeit. (b) Wirbelstärke bei $T = 14$. Der graue Rand ist das Wirbeldämpfgebiet.

Abb. 4.13: Fallgeschwindigkeit und Wirbelstärke beim freien Fall des Fliegers bei $Re = 100$.

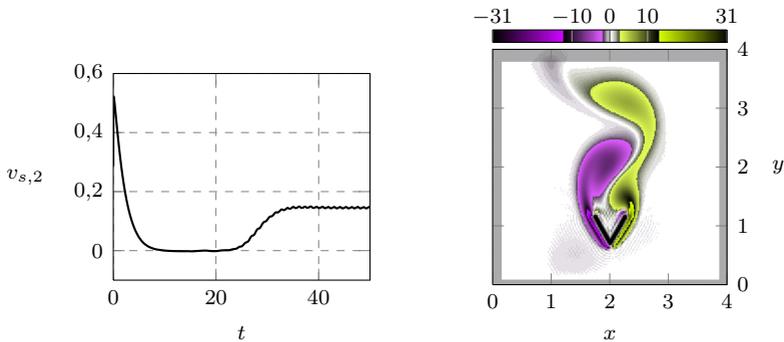
sich ein Betrag der Wirbelstärke von ungefähr 14. Im Bereich der Flügelunterseite beträgt die Wirbelstärke annähernd null.

In der Abb. 4.13a ist die Geschwindigkeitskomponente des Fliegers in y -Richtung dargestellt. Der Verlauf des Graphen ist glatt und weist ein asymptotisches Verhalten auf. Nach etwa zehn Perioden erfolgt keine relevante Veränderung der Geschwindigkeit. Die dimensionslose Grenzgeschwindigkeit beträgt somit $-1,4639$. Im nächsten Abschnitt wird der Flieger mit dieser Geschwindigkeit angeströmt.

4.4.2 Anströmen mit der Grenzgeschwindigkeit

Die Parameter der Simulation sind in der Tab. 4.2 und die Skizze in der Abb. 4.12 zu finden.

Diese Simulation dauert 50 Perioden. Der Λ -Flieger wird mit der in Abschn. 4.4.1 ermittelten Grenzfallgeschwindigkeit angeströmt. Nach etwa zehn Perioden stellt sich ein Gleichgewicht ein und der Körper bleibt im Fluid stehen (s. Abb.4.14a). Das Feld der Wirbelstärke sieht dabei dem Feld in der Abb. 4.13b ähnlich.



(a) Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung, aufgetragen über die Zeit. (b) Wirbelstärke bei $T = 40$. Der graue Rand ist der Vorticity spong.

Abb. 4.14: Geschwindigkeitsverlauf und Wirbelstärke in der Studie zu stationärem Schweben bei $Re = 100$.

Nach der 20-en Periode entsteht in dem stationären Feld der Wirbelstärke eine kleine Störung. Diese Störung schwingt sich auf und die Lösung wird instationär. Es entwickelt sich eine KARMAN'sche Wirbelstraße. Die sich periodisch ablösenden Wirbel werden gedämpft. Der transiente Übergang von einer stationären in eine periodisch-instationäre Lösung ist im Geschwindigkeitsverlauf zu sehen, er passiert zwischen $T = 25$ und $T = 35$ (s. Abb. 4.14a).

Wenn hinter einem Körper eine KARMAN'sche Wirbelstraße entsteht, erfährt er eine höhere Widerstandskraft, als im Falle einer stationären Umströmung [19, S.60]. Das erklärt die Steiggeschwindigkeit des Fliegers nach dem transienten Übergang. Des Weiteren ist das wirkende Moment gering, und der Flieger bleibt stabil.

Die in diesem Unterkapitel durchgeführte Studie hat gezeigt, dass für die Dauer der stationären Lösung der Zustand des stationären Schwebens eintritt. Außerdem wurde festgestellt, dass bei einer instationären Umströmung ebenfalls eine relativ konstante Kraft wirkt.

Für die Validierung des Lösers wurde die theoretische Überlegung des stationären Schwebens bei einer stationären Umströmung bestätigt.

Weitere Experimente, z. B. zu der Anpassung der Grenzfallgeschwindigkeit für den Fall der Karmanischen Wirbelstärke, können in anderen Studien durchgeführt werden (s. Abb. 4.14).

5 Simulation und Ergebnisse

Das Flugverhalten des Λ -Fliegers in einer um die Nulllage oszillierenden Strömung mit Gravitation wird untersucht. Es werden vier Studien durchgeführt. Der Aufbau ist in Abb. 4.1 skizziert. Alle Farbskalen sind angepasst.

Zwei von den Studien sind so aufgestellt, dass die ihre Ergebnisse mit denen der Forscher von [18] verglichen werden können. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass deren mathematisches Modell die Viskosität mit einer künstlichen Dissipation approximiert. Die Modellierung hier beruht auf der NSG mit einem viskosen Term der Form $\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j}$. Primär geht es um die Variation der Öffnungswinkel α und der Strömungsbeschleunigung κ . Der Vergleich der Ergebnisse in Bezug auf diese Parameter ist von Interesse. Es soll festgestellt werden, ob gleiche Flugeigenschaften erreicht werden können.

Die Viskosität hat einen starken Einfluss auf die Lösung. Es ist außerdem der Parameter, durch den die Rechenzeit erheblich steigt. Der Bereich der REYNOLDS-Zahlen der Simulationen kann zwischen 10 und 800 liegen. Die realen 3D Experimente von [32] wurden bei $Re > 500$ gemacht. Die Forscher gehen davon aus, dass der Auftriebsbeiwert C_y von der REYNOLDS-Zahl ab $Re > 500$ unabhängig wird [32, S.418]. Wie in deren Arbeit beschrieben, muss der über die Zeit integrierte C_y der Gewichtskraft gleich sein, damit der Λ -Flieger auf konstanter Höhe schwebt. In der dritten der vorliegenden Studien ist die Unabhängigkeit des Auftriebsbeiwertes C_y von der REYNOLDS-Zahl untersucht worden. Diese Studie wird als erstes durchgeführt, weil daraus die angemessenen REYNOLDS-Zahlen für weitere Simulationen gesetzt werden können.

Eine weitere Simulation zeigt das Flugverhalten des Λ -Fliegers in einer oszillierenden Strömung, die einen Inzidenzwinkel zu dem Gravitationsvektor aufweist.

5.1 Einfluss der Viskosität auf den Auftriebsbeiwert

In der Zeit, wo der Λ -Flieger vom Fluid umströmt wird, wirkt eine aerodynamische Kraft auf ihn. Der Auftriebsbeiwert C_y entspricht der normierten Kraftkomponente in y -Richtung. Für diese Studie wird die Definition des C_y und C_m von [30, S.386] übernommen:

$$C_y = \frac{2F_2}{\rho(\pi f A)^2 l}, \quad (5.1)$$

$$C_m = \frac{2M}{\rho(\pi f A)^2 l}. \quad (5.2)$$

Für eine Periode berechnet sich die gemittelten C_y und C_m mit folgenden Formeln:

$$\bar{C}_y = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t C_y(t) dt, \quad (5.3)$$

$$\bar{C}_m = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t C_m(t) dt. \quad (5.4)$$

Die über ganze Rechendauer gemittelten Koeffizienten berechnen sich mit:

$$\hat{C}_y = \frac{1}{T_{\text{end}}} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} \bar{C}_y dt, \quad (5.5)$$

$$\hat{C}_m = \frac{1}{T_{\text{end}}} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} \bar{C}_m dt. \quad (5.6)$$

In dieser Studie werden fünf Simulationen durchgeführt. Dabei wird die Viskosität variiert. Dies entspricht einer Variation der REYNOLDS-Zahl von 400 bis 800. Die übrigen Parameter des Lösers sind in der Tab. 5.1 zusammengefasst.

Um sicher zu gehen, dass sich die Ergebnisse nur in Hinblick auf die REYNOLDS-Zahl unterscheiden, wird die feinst Netzauflösung der Rechnung bei $Re = 800$ in allen anderen Simulationen beibehalten. Es stellte sich heraus, dass in dieser Studie für $T_{\text{end}} > 6$ eine erheblich größere Rechenleistung notwendig wäre.

Tab. 5.1: Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Abhängigkeit der aerodynamischen Kräfte von der REYNOLDS-Zahl.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$N_x = N_y$	3500	α	$\pi/4$
T_{end}	6	$L_x = L_y$	12
ν	Variation	Re	{400; 800}
m	8	CFL	0,4
h/l	0,07	C_{sp}	10^{-1}
κ	1	$\langle \mathbf{u}_1 \rangle$	0
k	0,2	$\langle \mathbf{u}_2 \rangle$	$\pi \sin(2\pi t)$
(x_s, y_s)	(6,6)	θ_{start}	1°
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0

Die Darstellung der Ergebnisse ist wie folgt organisiert. Die Größen, wie die Wirbelstärke und Druck, sind nur für die REYNOLDS-Zahlen 400 und 800 aufgeführt. Daran lässt sich das Verhalten des Fluids zeigen. Um die Kinematik des Λ -Fliegers zu untersuchen, ist in diesem Abschnitt der Lagewinkel θ , die y-Komponente der Position y_s , der Auftriebs- \hat{C}_y und der Momentenbeiwert \hat{C}_m in Betracht genommen worden.

Für $Re = 400$ wird in der Abb. 5.4 die Wirbelstärke um den Λ -Flieger zu sechs unterschiedlichen Zeitpunkten betrachtet. Die Zeitpunkte wurden so gewählt, dass zwei charakteristische Vorgänge in dem Fluid demonstriert werden können.

Wenn der Flieger in der ersten Hälfte der Periode von unten umströmt wird, entsteht jeweils auf der linken und rechten Flügeloberseite ein Spitzenwirbel (s. Abb. 5.4 bei $t = \{1,5; 2,5; 4,5\}$). Sein Durchmesser entspricht in etwa der halben Flügellänge. Es ist auch zu erkennen, dass sich auf der Flügeloberseite entlang der Wand ein zweiter Wirbel bildet, der in die dem Spitzenwirbel entgegengesetzte Richtung rotiert. Dieser Wandwirbel ist viel dünner und stellt mit dem Spitzenwirbel ein Dipol dar. Das Maximum der Wirbelstärke tritt direkt auf der Flügeloberseite auf (vgl. Abb. 5.4).

In der zweiten Hälfte der Periode (s. Abb. 5.4 bei $t = \{2; 3; 4\}$) wird der Flieger von Oben umströmt. Das Dipol, bestehend aus Spitzen- und Wandwirbel, löst sich an der Flügelspitze ab und gleitet

nach unten vom Flieger weg. Deren Gleitrichtung wird auch von den umliegenden Wirbeln beeinflusst (vgl. Abb. 5.4). Der Vorgang der Wirbelgenerierung und deren Ablösung ist bei jeder Periode festzustellen.

In der Abb. 5.5 ist die zu der Abb. 5.4 entsprechende Druckverteilung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass, wenn sich die Spitzenwirbel formen, auf den Flügeloberseiten Unterdruckgebiete entstehen. Durch die Druckdifferenz der Flügeloberseite und Flügelunterseite entsteht ein Teil der Auftriebskraft.

Die selben Zeitpunkte, die in Abb. 5.5 und Abb. 5.4 betrachtet wurden, sind entsprechend für $Re = 800$ in Abb. 5.6 und Abb. 5.9 dargestellt. Das Strömungsfeld ändert sich, es sind mehr kleine Wirbelstrukturen zu erkennen. Trotzdem sind die charakteristischen Wirbel auffindbar. Es ist auch zu vermerken, dass die dominanten Wirbel auf der Flügeloberseite etwas stärker sind. Denn nach der gleichen Farbskala ist deren Zentrum ausgeprägter (vgl. Abb. 5.4 mit 5.6).

Die von der Flügelspitze abfließenden Wirbelpaare können im Kontrollvolumen nicht schnell genug dissipieren und treten in folgenden Rechenperioden in das Umfeld des Fliegers erneut ein. Die Ausbreitung dieser Wirbelpaare ist in der Abb. 5.8 für $Re = 400$ und, als Vergleich zum selben Zeitpunkt, für $Re = 800$ in Abb. 5.6 nachzuvollziehen.

Als nächstes wird das Verhalten des Fliegers analysiert. In der Abb. 5.1 ist die y -Komponente der Position für die letzten drei Rechenperioden zu sehen. Es ist ersichtlich, dass der Λ -Flieger im ganzen Bereich untersuchter REYNOLDS-Zahlen fällt. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Änderung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, also die Strömungsbeschleunigung, negativ ist. Der Flieger erfährt genau nach der Hälfte der Periode erhöhten Auftrieb, der sich in der Position des Fliegers bemerkbar macht (s. Abb. 5.1). Die Wirbelstärke in der Abb. 5.4 und Abb. 5.6 ist genau zum Zeitpunkt der halben Periode dargestellt. Es ist erkennbar, dass dies der Zeitpunkt ist, wo die ausgebildeten Spitzenwirbel am größten sind.

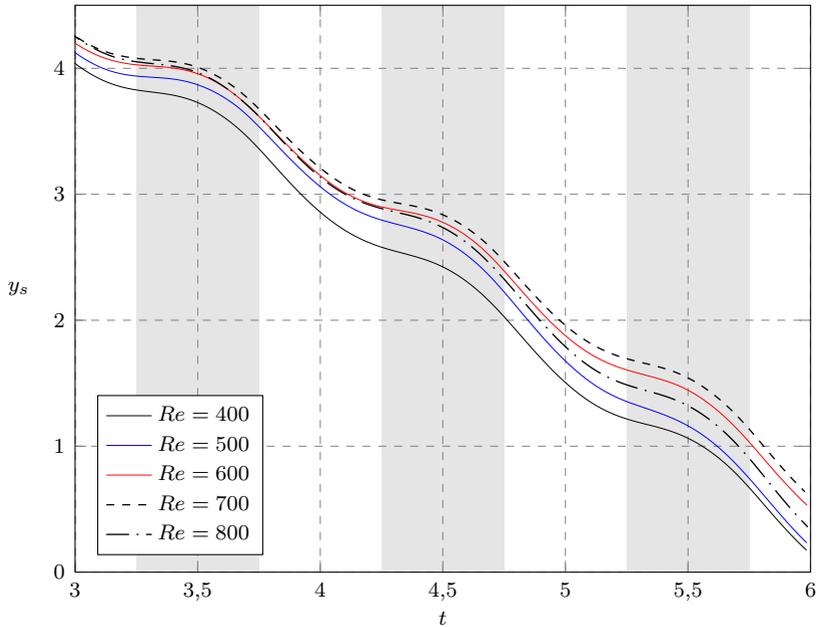


Abb. 5.1: Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für $Re = \{400; 800\}$ und $\kappa = 1$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.1 zu finden.

In der Abb. 5.2 ist der Lagewinkel θ über die Zeit bei unterschiedlichen REYNOLDS-Zahlen gezeigt. Es zeigt sich keine eindeutige Abhängigkeit. Außerdem ist der gemittelte Momentenbeiwert über die ganze Rechendauer annähernd null (s. Abb. 5.3), was darauf schließen lässt, dass der Λ -Flieger nicht umkippt. Auf die Lagestabilität wird in der weiteren Ergebnisbeschreibung (s. Abschn. 5.4) eingegangen, dabei wird die Rechendauer länger als sechs Perioden betragen. Des Weiteren ist in den Auftriebsbeiwerten für diese Studie keine relevante Änderung in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl zu beobachten (s. Abb. 5.3).

Die obenstehenden Ergebnisse sollen die charakteristischen Fluidmechanischen Vorgänge der Wirbelgenerierung und -Ablösung darstellen und deren Auswirkung auf den Λ -Flieger veranschaulichen.

In folgenden Studien wird die Strömungsbeschleunigung und der Öffnungswinkel untersucht, bei denen das Schweben des Fliegers auftritt.

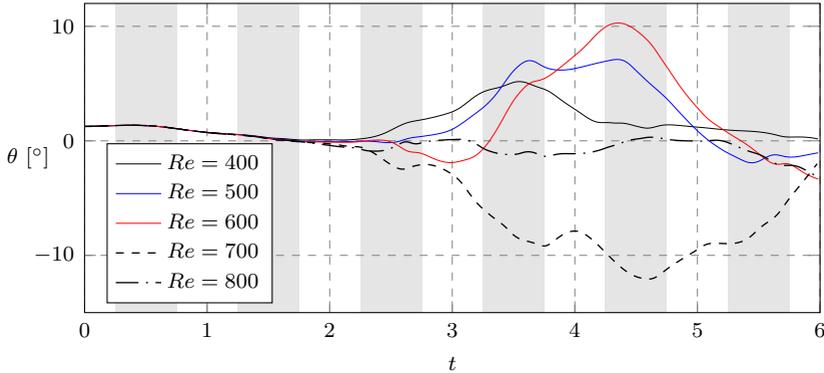


Abb. 5.2: Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für $Re = \{400; 800\}$ und $\kappa = 1$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.1 zu finden.

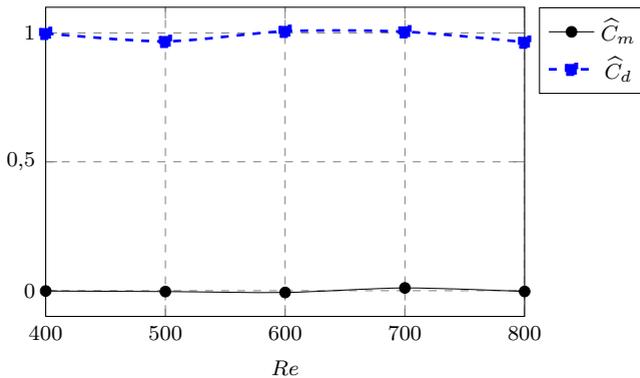


Abb. 5.3: Gemittelte Auftriebs- und Momentenbeiwerte des fallenden Λ -Fliegers für $Re = \{400; 800\}$. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die Ergebnisse sind auf $Re = 400$ normiert.

Abb. 5.4: Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die entsprechende Druckverteilung ist in der Abb. 5.5 abgebildet.

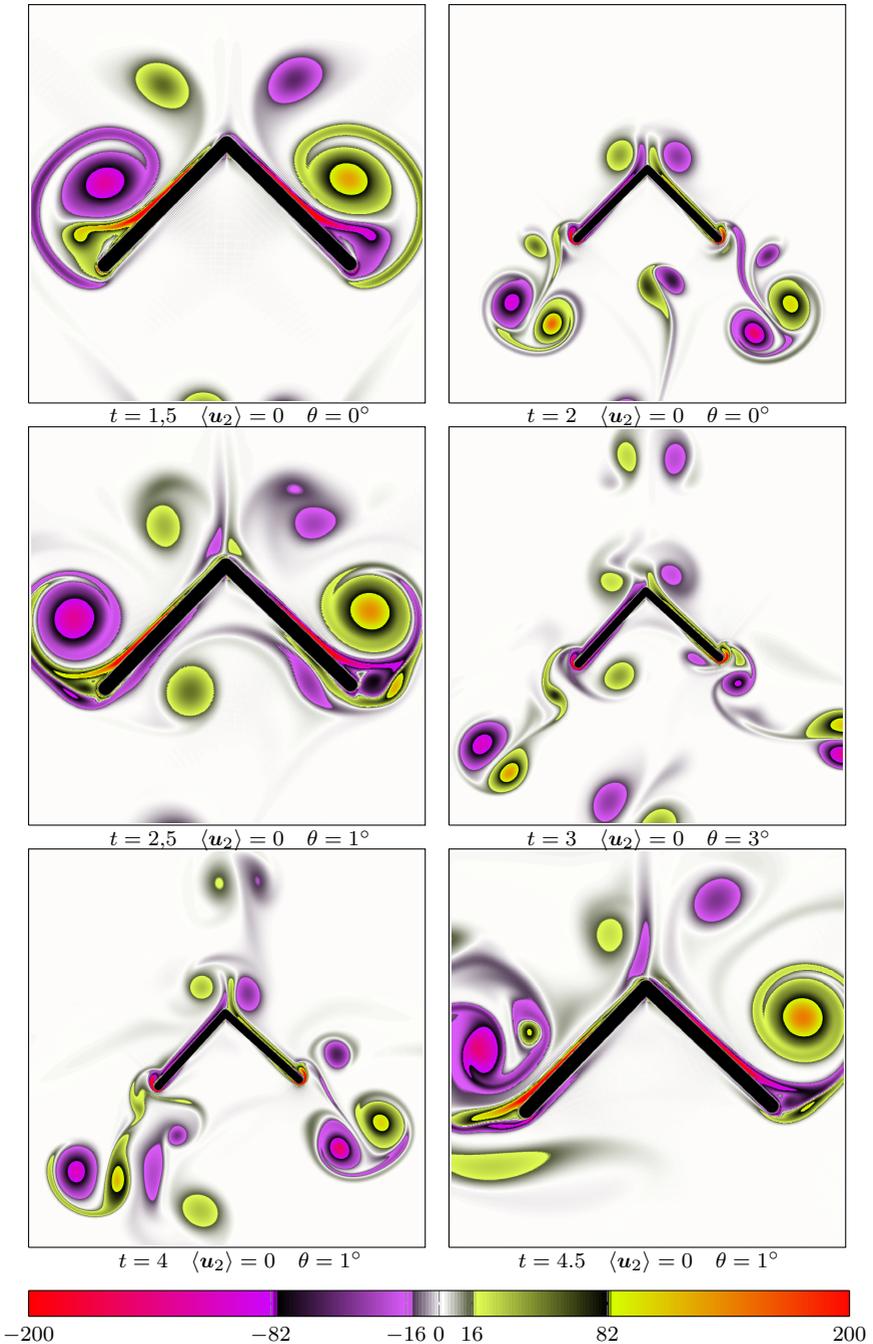


Abb. 5.5: Darstellung der Druckverteilung bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die Wirbelstärke ist in der Abb. 5.4 abgebildet.

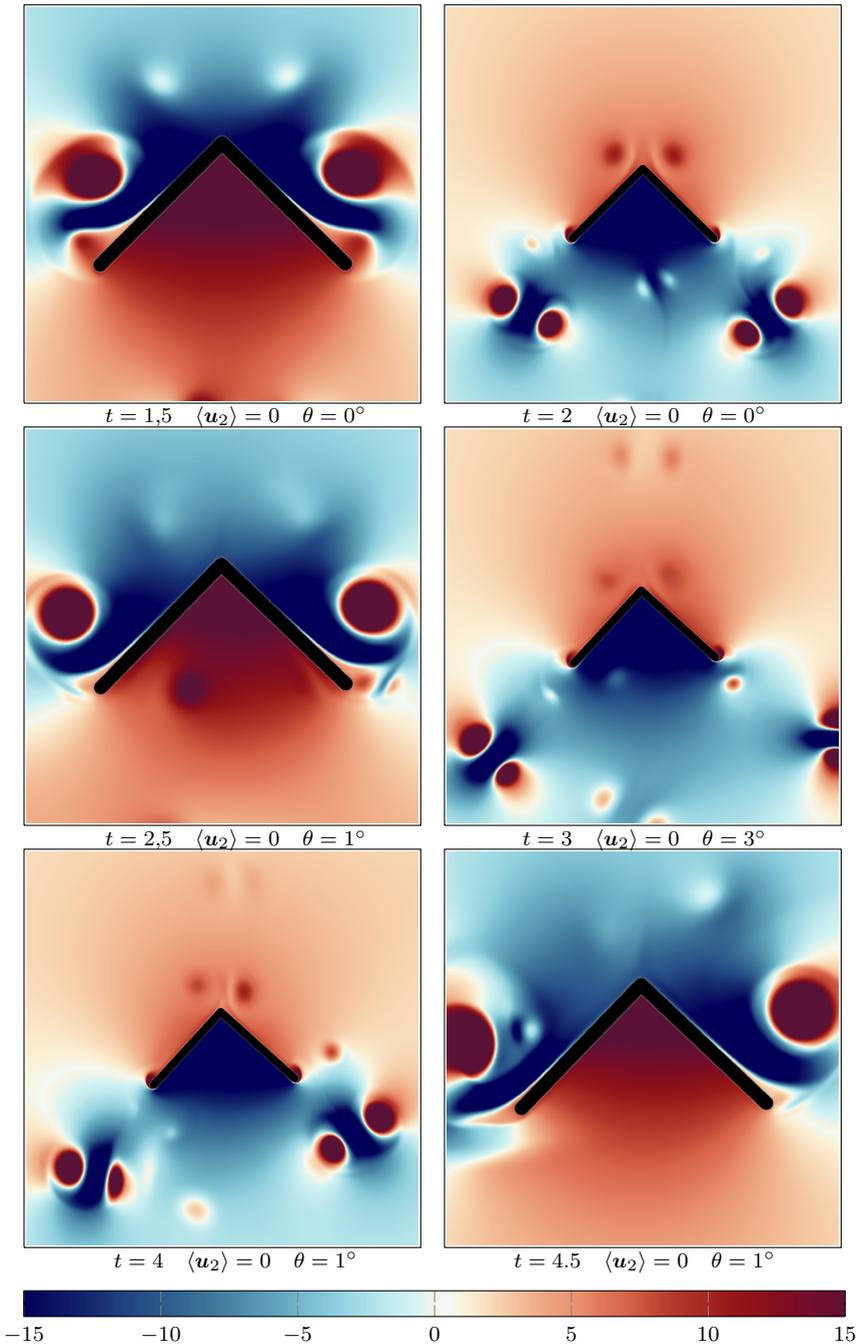


Abb. 5.6: Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die entsprechende Druckverteilung ist in der Abb. 5.7 abgebildet.

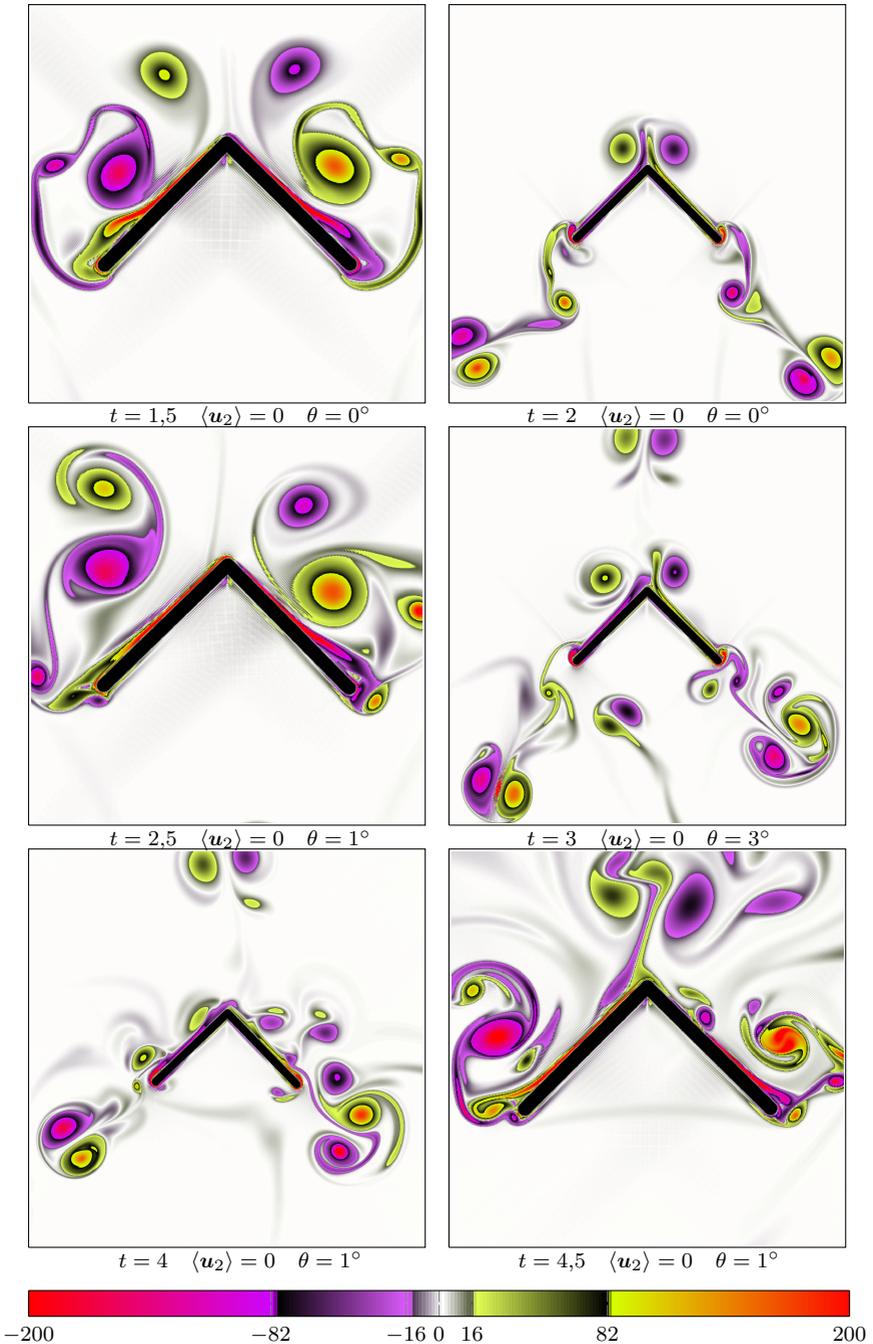


Abb. 5.7: Darstellung der Druckverteilung bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die Wirbelstärke ist in der Abb. 5.6 abgebildet.

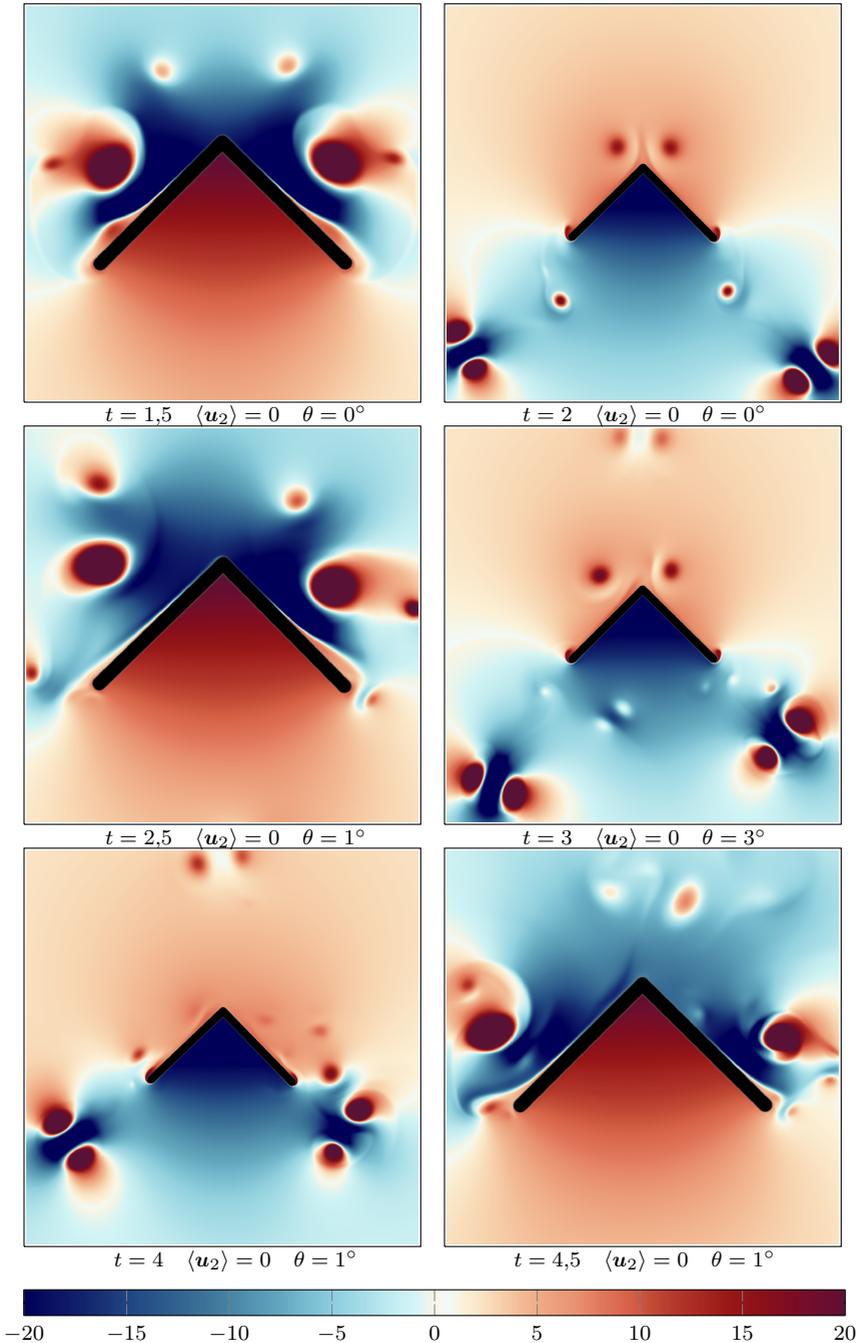


Abb. 5.8: Wirbelausbreitung im Kontrollvolumen. Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 400$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die grauen Bereiche kennzeichnen das Wirbeldämpfgebiet.

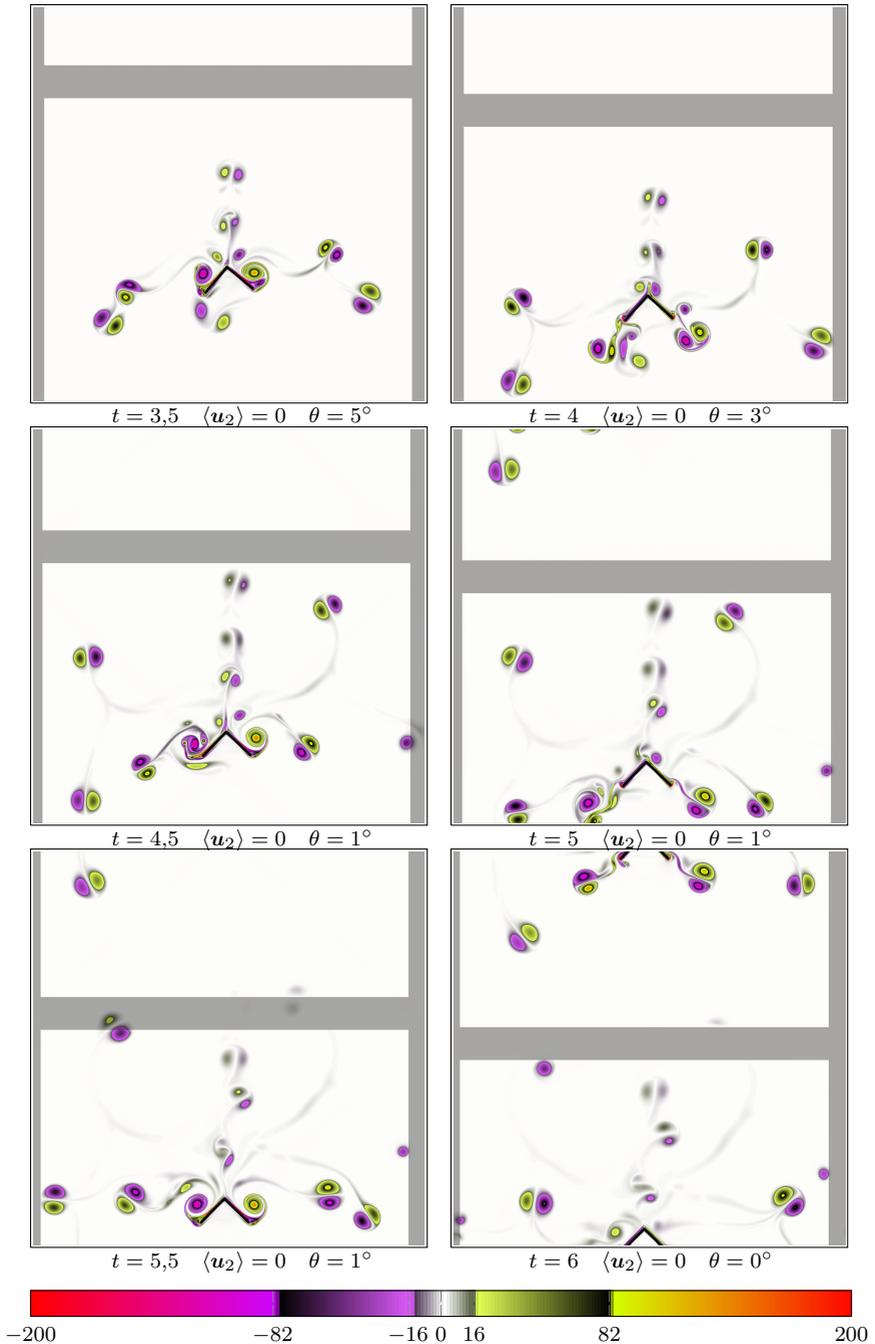
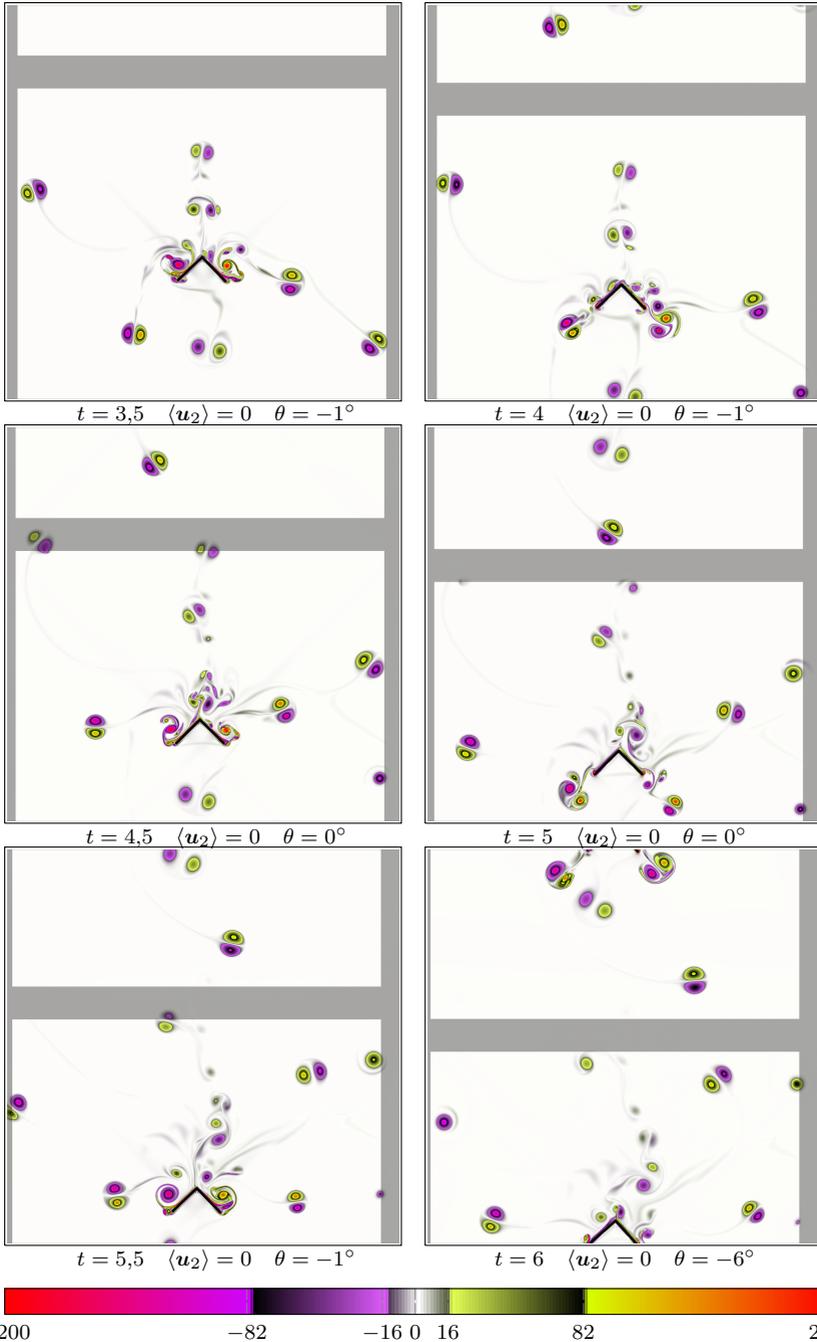


Abb. 5.9: Wirbelausbreitung im Kontrollvolumen. Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 800$ und $\kappa = 1$. Der Flieger fällt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.1 zu finden. Die grauen Bereiche kennzeichnen das Wirbeldämpfgebiet.



5.2 Variation der Strömungsbeschleunigung

Der Parameter $\kappa = Af^2/g$ ist die dimensionslose Beschleunigung der oszillierenden Strömung (laut [18], s. Abschn. 2.2). Durch die folgend beschriebene Studie wird festgestellt, in welchem Verhältnis die Strömungsbeschleunigung zu der Gravitationsbeschleunigung stehen muss, damit der Λ -Flieger schweben kann.

Basierend auf den Ergebnissen des Abschn. 5.1 wird eine Viskosität von 0,002 (was einer $Re = 500$ entspricht) gewählt. Die gesamte Rechendauer einer Simulation beträgt 15 Perioden, und es werden insgesamt vier Simulationen jeweils mit $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ durchgeführt. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.2 zusammengefasst.

Tab. 5.2: Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Flugeigenschaften bei unterschiedlicher Strömungsbeschleunigung.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$N_x = N_y$	3500	α	$\pi/3$
T_{end}	15	$L_x = L_y$	12
ν	0,002	Re	500
m	8	CFL	0,4
h/l	0,04	C_{sp}	10^{-1}
κ	{1; 3; 5; 7}	$\langle \mathbf{u}_1 \rangle$	0
k	0,2	$\langle \mathbf{u}_2 \rangle$	$\pi \sin(2\pi t)$
(x_s, y_s)	(6,6)	θ_{start}	1°
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0

Zur Veranschaulichung der Wirbelstärke wird die Rechnung bei $\kappa = 5$ gewählt (s. Abb. 5.14). Das grundlegende Phänomen der Wirbelgenerierung und deren Ablösung ist in allen Simulationen dieser Studie festzustellen und ist bereits im Abschn. 5.1 erläutert worden. In diesem Abschnitt steht die Bewegung des Fliegers im Vordergrund.

In der Abb. 5.10 ist die Position des Λ -Fliegers im Inertialsystem für unterschiedliche κ dargestellt.

Der Fall $\kappa = 1$ wurde bis $t = 6$ in Abschn. 5.1 für ein anderes α , und zwar $\alpha = \pi/4$ gerechnet. Zum Vergleich ist dieser Verlauf in der Abb.5.11 gezeichnet.

In der Abb. 5.11 ist zu sehen, dass der Flieger nach $t = 6$ weiterhin fällt, jedoch mit einer anderen Geschwindigkeit. Nach dem Vergleich der Höhenposition zur Zeit $t = 6$ in der Abb. 5.11 ist festzustellen, dass der Flieger mit dem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/3$ um etwa zwei Längeneinheiten höher liegt, als für den Fall von $\alpha = \pi/4$. Die Fallgeschwindigkeit ist von dem Öffnungswinkel abhängig und ist explizit im Abschn. 5.3 untersucht worden.

Die Bahnlinien in der Abb. 5.10 zeigen, dass der Λ -Flieger bei $\kappa \geq 5$ steigt. Das veranschaulicht auch die Abb. 5.11.

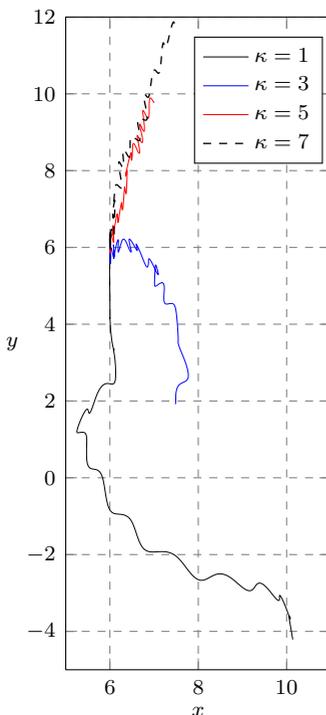


Abb. 5.10: Die Bewegungsbahn des Λ -Fliegers bei $Re = 500$ für unterschiedliche κ . Die übrigen Parameter der Simulation sind in der Tab. 5.2 zu finden.

In der Abb. 5.12 ist der Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ bei $Re = 500$ dargestellt. Nach $t = 3$ treten Schwingungen auf. Für die Rechendauer von $T_{\text{end}} = 15$ ist keine eindeutige Periodizität zu sehen.

Außer für den Fall $\kappa = 3$, bleibt der Lagewinkel im Bereich $\{-40^\circ; 40^\circ\}$. Für den Fall $\kappa = 3$ zeichnet sich in der letzten Periode eine leicht stabilisierende Tendenz ab (s. Abb. 5.12). Die Untersuchung des rückstellenden Moments ist im Abschn. 5.4 zu finden.

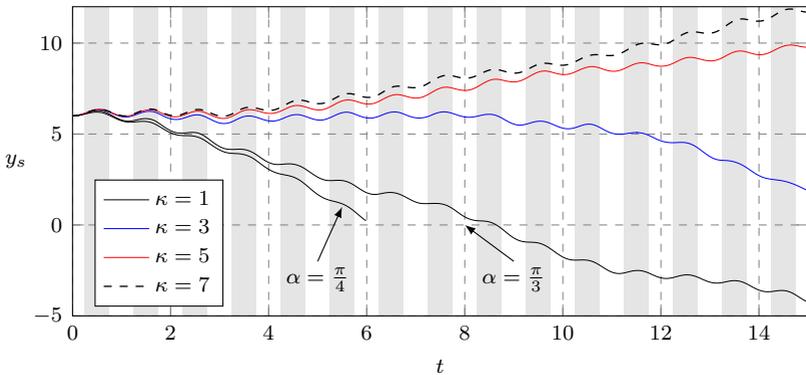


Abb. 5.11: Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ bei $Re = 500$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.2 zu finden.

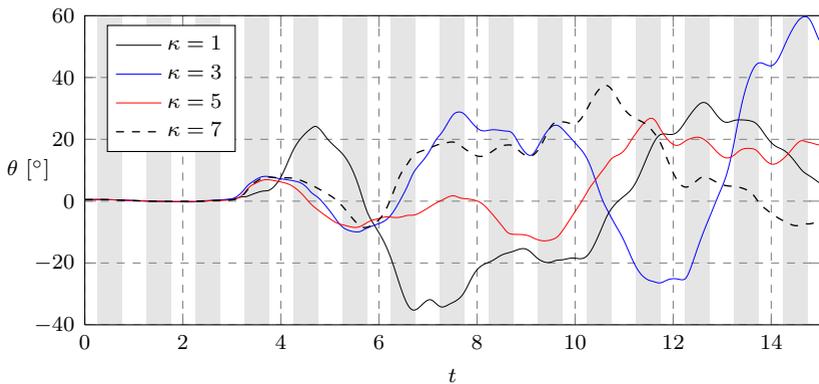


Abb. 5.12: Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für $\kappa = \{1; 3; 5; 7\}$ bei $Re = 500$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.2 zu finden.

Um den Vergleich mit den Ergebnissen von [18] herzustellen, wird die mittlere Änderung der Höhenposition ausgewertet mit [18, S.10]:

$$\Delta \langle y_s \rangle = \frac{\langle y_s \rangle|_{t_2} - \langle y_s \rangle|_{t_1}}{t_2 - t_1}, \quad (5.7)$$

$$\langle y_s \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y_s(t') dt'. \quad (5.8)$$

Die Dauer der Mittlung für diese Studie ist von $t_1 = 3T$ bis $t_2 = 14T$. Der Kurvenvergleich ist in der Abb. 5.13 zu sehen. Die maximal mögliche Steigrate ist größer als in der Vergleichsstudie. Das Schweben beginnt bei annähernd gleichen Werten von κ .

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Λ -Flieger mit Parametern (s. Tab. 5.2) für $\kappa > 3,5$ in einer um die Null oszillierenden Strömung passiv schweben kann.

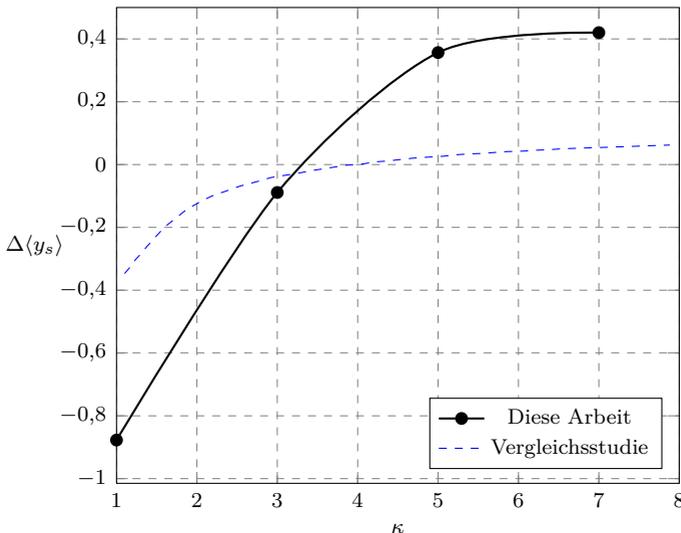
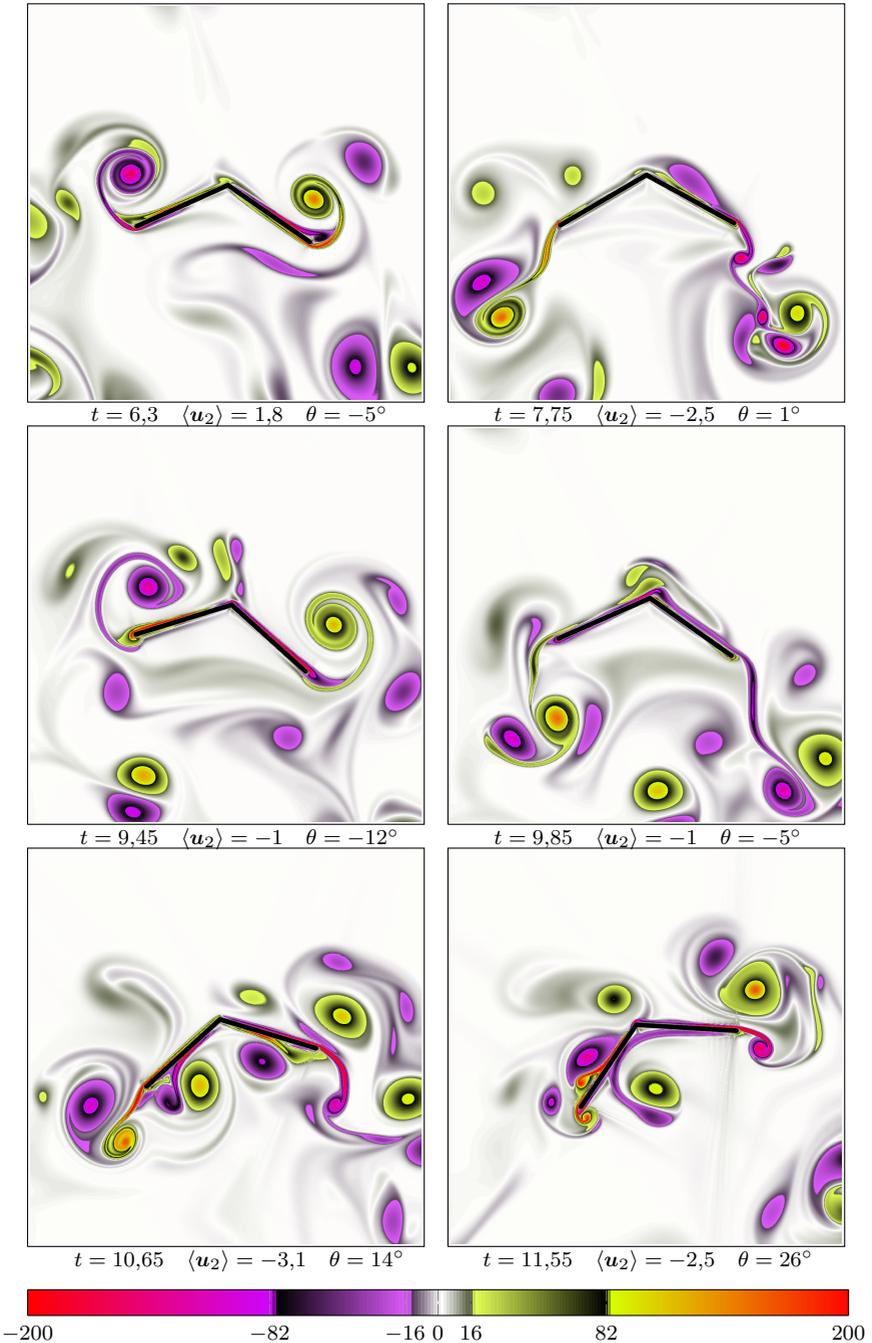


Abb. 5.13: Die über die Zeit gemittelte Änderung der Höhenlage des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von κ . Die übrigen Parameter der Simulationen sind in Tab. 5.2 zu finden. Die Vergleichsstudie sind von [18].

Abb. 5.14: Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 500$, $\kappa = 5$. Der Flieger steigt. Die übrigen Parameter der Simulation sind in der Tab. 5.2 zu finden.



5.3 Variation des Öffnungswinkels

Im Abschn. 5.2 ist bereits erwähnt worden, dass das Flugverhalten des Fliegers von seinem Öffnungswinkel abhängig ist. In dieser Studie werden die Auswirkungen der Variation von α dargestellt und mit den Ergebnissen von [18] verglichen.

Als Konsequenz der Studie im Abschn. 5.2 wurde entschieden, die Rechendauer zu vergrößern. Der Grund dafür ist, dass die Änderung der Höhenlage nicht linear ist (s. Abb. 5.11), und mehr Rechenperioden notwendig sind, um mögliche Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. Diese Studie wurde für $Re = 250$ und 500 durchgeführt. Im Folgenden werden die Ergebnisse für $Re = 250$ ausführlicher präsentiert und zum Schluss alle Studien in einem Graphen verglichen.

Tab. 5.3: Parameter der Simulationen zur Untersuchung der Flugeigenschaften bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$N_x = N_y$	{2048; 3500}	α	{30°; 80°}
T_{end}	25	$L_x = L_y$	12
ν	{0,004; 0,002}	Re	{250; 500}
m	8	CFL	0,4
h/l	0,06	C_{sp}	10^{-1}
κ	{4; 5}	$\langle \mathbf{u}_1 \rangle$	0
k	0,2	$\langle \mathbf{u}_2 \rangle$	$\pi \sin(2\pi t)$
(x_s, y_s)	(6,6)	θ_{start}	1°
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0

Die Änderungen der Höhenlage y_s über die Zeit sind für mehrere α in Abb. 5.15 dargestellt. Bei $\alpha = 30^\circ$ und 40° verliert der Flieger seine Lagestabilität, kippt um und stürzt ab. Das ist im Verlauf des Lagewinkels über die Zeit ebenso zu sehen (s. Abb. 5.16). Die Wirbelstärke zum Moment des Umdrehens ist in der Abb. 5.18 dargestellt.

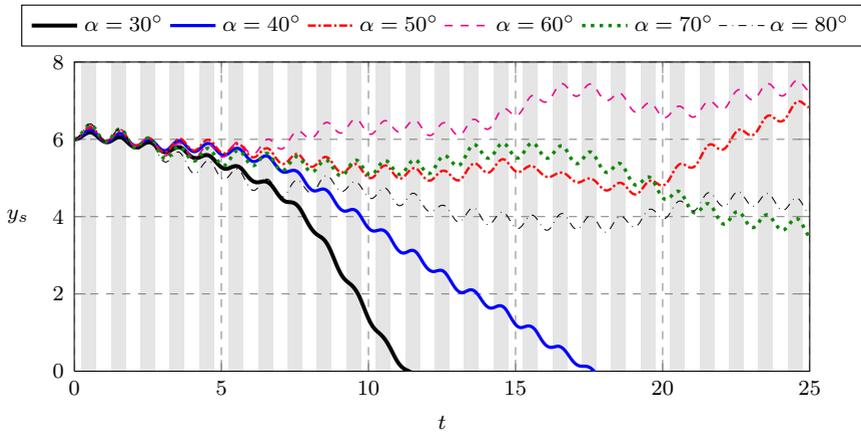


Abb. 5.15: Verlauf der Höhenposition des Λ -Fliegers über die Zeit für unterschiedliche α bei $Re = 250$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Studie sind in der Tab. 5.3 zu finden.

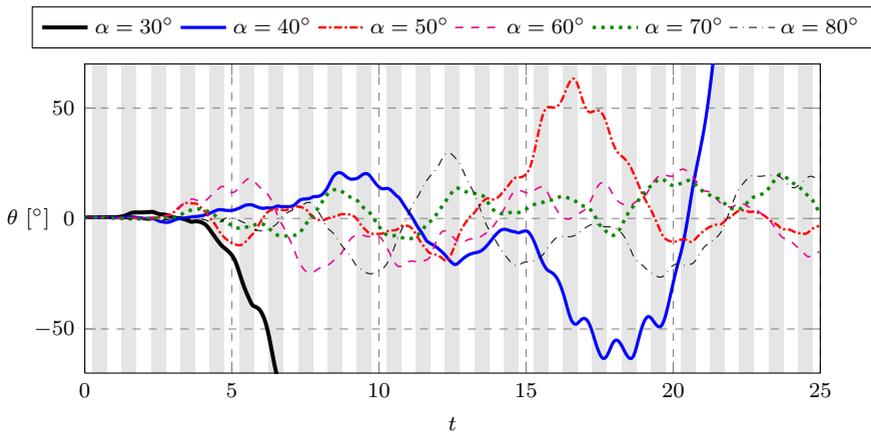


Abb. 5.16: Verlauf des Lagewinkels über die Zeit für unterschiedliche α bei $Re = 250$. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Zeit, in der die Beschleunigung der mittleren Strömung negativ ist. Die Parameter dieser Simulationen sind in der Tab. 5.3 zu finden.

Für $\alpha = 70^\circ$ und 80° ist ein leicht fallender Verlauf beobachtbar, und für $\alpha = 60^\circ$ steigt der Flieger eindeutig.

Einen unerwarteten Verlauf der Höhenposition weist der Flieger mit $\alpha = 50^\circ$ in den Perioden 19 bis 25 auf. Er fängt an rasant zu steigen (s. Abb. 5.15). Vor diesem Ereignis ist in der Abb. 5.16 zu sehen, dass er stark ausgelenkt wird, sein Lagewinkel wird $\theta = 55^\circ$. Jedoch stabilisiert er sich bis zur 19'ten Periode. Während dieses Stabilisierungsmanövers verlässt er das Gebiet der Wirbel, die er in den Perioden davor erzeugt hat. Nach dem Stabilisierungsmanöver befindet er sich in einer weniger verwirbelten Umgebung, was sein steigen erklären könnte.

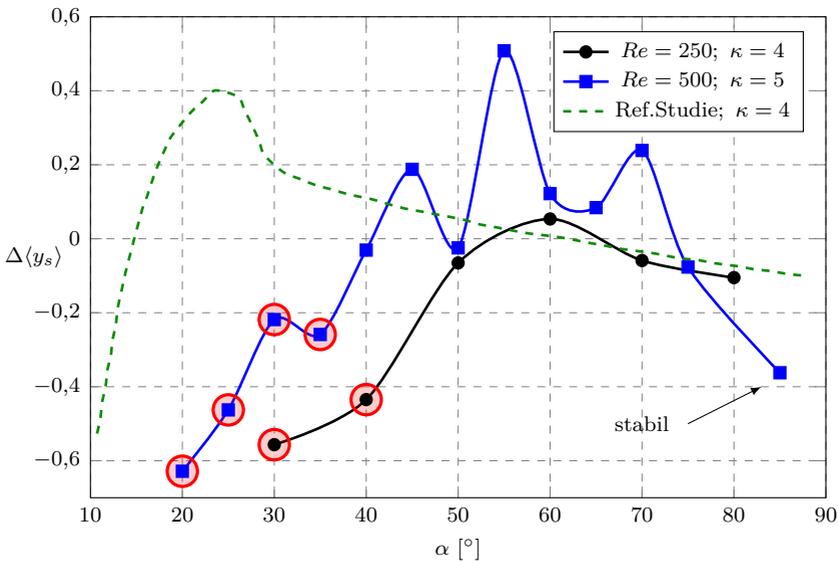


Abb. 5.17: Die über die Zeit gemittelte Änderung der Höhenlage des Λ -Fliegers in Abhängigkeit von α . Übrige Parameter der Simulationen sind in Tab. 5.3 zu finden. Die Referenzstudie ist von [18]. Die umkreisten Punkte bedeuten, dass der Flieger sich umgedreht hat ($\theta > 90^\circ$).

In der Abb. 5.17 ist die gemittelte Änderung der Höhenposition des Λ -Fliegers $\Delta\langle y_s \rangle$ in Abhängigkeit von α dargestellt. Sie wurde mit der Gl. 5.7 für $t_1 = 3T$ bis $t_2 = 19T$ berechnet, um einen Vergleich

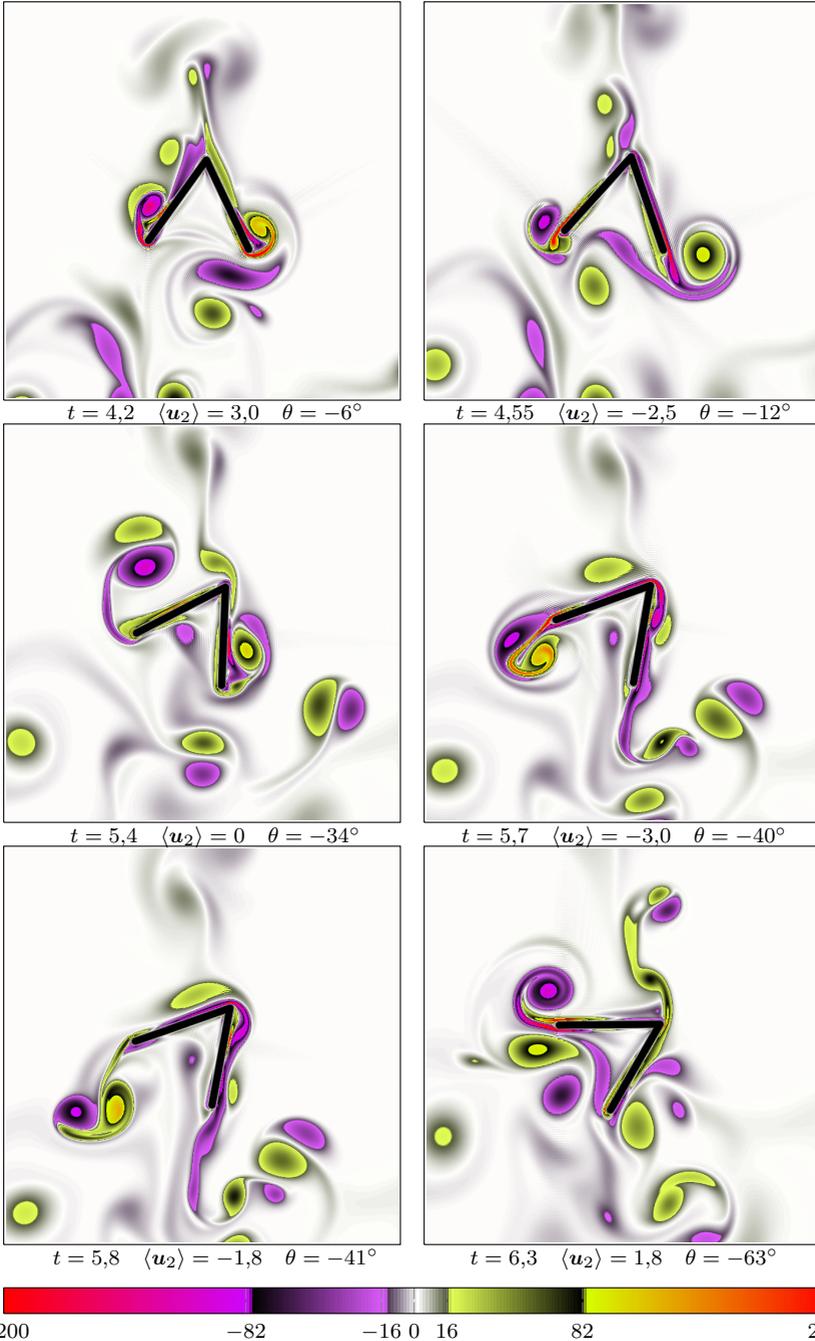
mit [18] anzustellen. Im Mittel ist die Änderung von y_s nicht linear (s. Abb. 5.15), deswegen sollen die Verläufe nur grob gedeutet werden.

Der Unterschied zwischen den Verläufen aus dieser Studie und der Vergleichsstudie [18] ist deutlich sichtbar. Insbesondere ist die erhöhte Steigrade für kleinere α nicht gegeben. Die umkreisten Datenpunkte kennzeichnen Simulationen, wo der Λ -Flieger in den früheren Rechenperioden die Stabilität verliert.

Aus der Abb. 5.17 kann entnommen werden, dass der Λ -Flieger für Winkel 45° bis 70° bei einer $Re = 500$ und $\kappa = 5$ in einer um die Nulllage oszillierenden Strömung schweben kann. Aus der Studie bei $Re = 250$ mit $\kappa = 4$ geht hervor, dass der Bereich der Öffnungswinkel, bei denen das Schweben auftritt, schmaler ist. Es muss kein Schluss gezogen werden, dass dieser Bereich auch in Folge der Senkung der REYNOLDS-Zahl enger wird. Der Grund dafür liegt in den unterschiedlichen Werten von κ .

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass für beide untersuchten REYNOLDS-Zahlen das Steigen des Λ -Fliegers mit einem Öffnungswinkel im Bereich von $\alpha = 60^\circ$ am besten möglich ist.

Abb. 5.18: Darstellung der Wirbelstärke bei $Re = 250$, $\kappa = 4$ und $\alpha = \pi/6$. Der Flieger verliert seine Lagestabilität und stürzt ab. Die übrigen Parameter der Simulation sind in Tab. 5.3 zu finden.



5.4 Inzidenzwinkel der Anströmung

Bis jetzt wurden die numerischen Studien so aufgestellt, dass die Oszillation der Strömung in einer Ebene mit dem Gravitationsvektor stattfand. In diesem Experiment wird die Oszillation unter einem Winkel zu dem Gravitationsvektor ausgerichtet (s. Abb. 5.19). Der Flieger wird somit aus der Ruhelage gedreht. Die abfließenden Wirbel werden ihn stabilisieren. Dies wurde in einer statischen Studie von [30] bereits gezeigt. Dabei analysierten die Forscher die Fluidynamik um einen festgehaltenen Flieger.

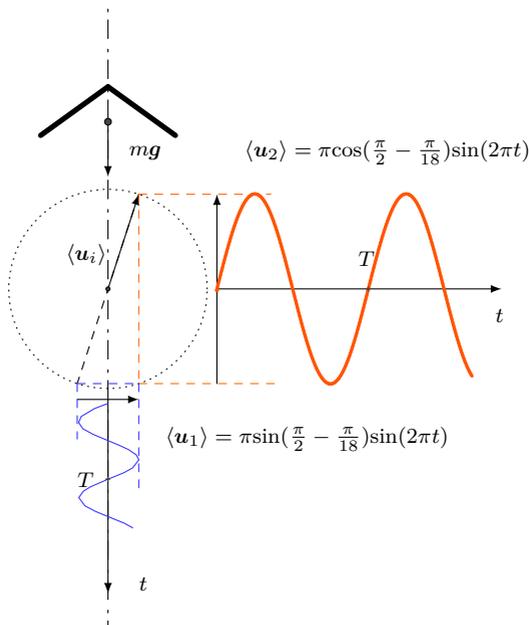


Abb. 5.19: Skizze zur Erklärung der unter einem Winkel zur Gravitationskraft oszillierenden mittleren Strömung. Der Inzidenzwinkel beträgt $\frac{\pi}{18}$.

Die Parameter der Simulation sind in der Tab. 5.4 zu finden. Unter den angegebenen Bedingungen fällt der Λ -Fliegers, wie bereits schon in Abschn. 5.3 gezeigt. Jedoch verliert er seine Stabilität nicht. In

der Abb. 5.20 ist der Momentenbeiwert, gemittelt in jeder Periode über die Zeit, gezeigt.

Tab. 5.4: Parameter der Simulation mit der Anströmung, welche einen Inzidenzwinkel aufweist.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$N_x = N_y$	2048	α	50°
T_{end}	25	$L_x = L_y$	12
ν	0,004	Re	250
m	8	CFL	0,4
h/l	0,06	C_{sp}	10^{-1}
κ	4	$\langle \mathbf{u}_x \rangle$	$\pi \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}) \sin(2\pi t)$
k	0,2	$\langle \mathbf{u}_y \rangle$	$\pi \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}) \sin(2\pi t)$
(x_s, y_s)	(6,6)	θ_{start}	1°
$v_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\dot{\theta}_{\text{start}}$	0
$a_{s,i,\text{start}}$	(0,0)	$\ddot{\theta}_{\text{start}}$	0

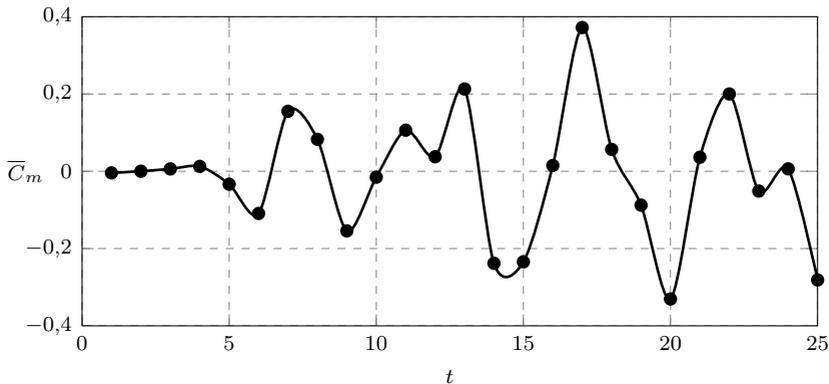


Abb. 5.20: Darstellung von \overline{C}_m über die Zeit bei der Simulation, in der die Anströmung einen Inzidenzwinkel ($\frac{\pi}{18}$) aufweist ($Re = 250$, $\kappa = 4$). Weitere Parameter sind in der Tab. 5.4 zu finden.

Das Verhalten des Fliegers ist schwingend, der Mittelwert über die gesamte Rechendauer beträgt $\widehat{C}_m = 0,019915$. Der Λ -Flieger dreht sich nicht um, weil die abfließenden Wirbel ihn stabilisieren. Dieser Vorgang ist in den Abb. 5.21 und Abb. 5.22 zu sehen.

In diesen Abbildungen ist auf der linken Seite die Wirbelstärke und auf der rechten Seite der Betrag und das Vektorfeld der Strömungsgeschwindigkeit zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Die Abb.

5.21 zeigt drei Zeitpunkte, wo die charakteristischen Spitzenwirbel zu sehen sind. Die Abb. 5.22 zeigt, was unmittelbar nach den Vorgängen in der Abb. 5.21 mit dem Strömungsfeld passiert.

Wenn sich der Flieger in einer geneigten Lage befindet (z. B. $\theta < 0$), ist sein rechter Flügel mehr in die Richtung der Strömung gerichtet als sein linker. Zu dem Zeitpunkt, wo er von unten angeströmt wird, entsteht auf Grund der größeren Anstellung des linken Flügels ein stärkerer Spitzenwirbel auf der linken Flügeloberseite (s. Abb. 5.21 oben).

Dann wechselt die oszillierende Strömung ihre Richtung und strömt von oben nach unten. Dabei formt sich der Spitzenwirbel in ein lokal gerichtetes Strömungsgebiet, welches auf die Oberseite des Flügels trifft. Der Betrag der Geschwindigkeit in diesem Gebiet ist größer als der der mittleren Strömung, weil die kinetische Energie des Spitzenwirbels hinzugekommen ist (verfolge in Abb. 5.21 zu Abb. 5.22).

Die Wirkung der lokalen Strömungsgebiete ist stark abhängig davon, wo sich genau der Spitzenwirbel auf dem Flügel bildet. Die umgebenden Wirbel beeinflussen den Vorgang ebenfalls. Die Spitzenwirbel generieren Auftrieb beim Hochströmen (s. Abschn. 5.1) und wirken stabilisierend während des Runterströmens.

Abb. 5.21: Entstehung der Wirbel. Darstellung der Wirbelstärke (links) und der Geschwindigkeit (rechts) bei $Re = 250$, $\kappa = 4$. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.4 zu finden. Auf dem linken Flügel sind jeweils starke Spitzenwirbel zu sehen.

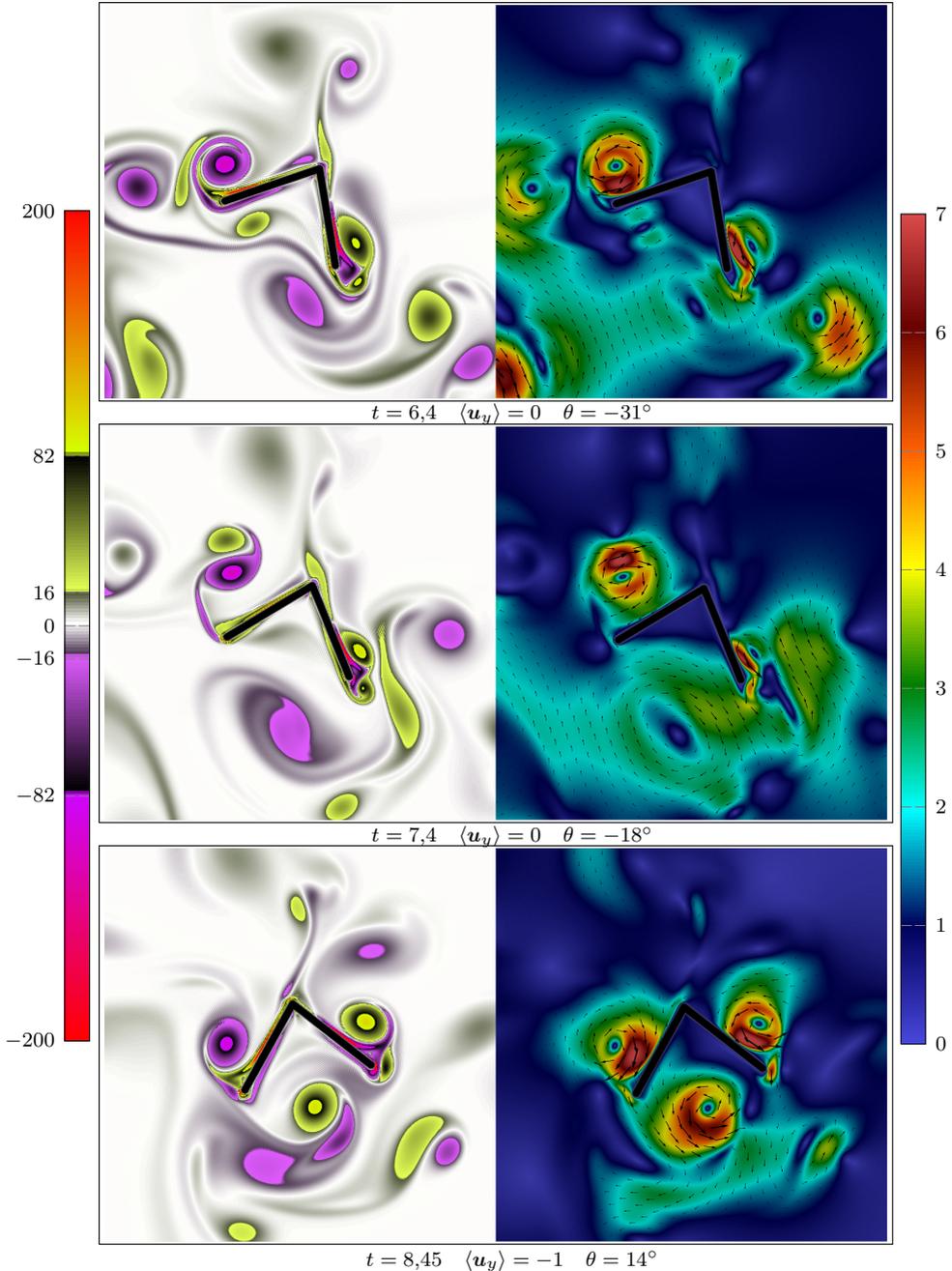
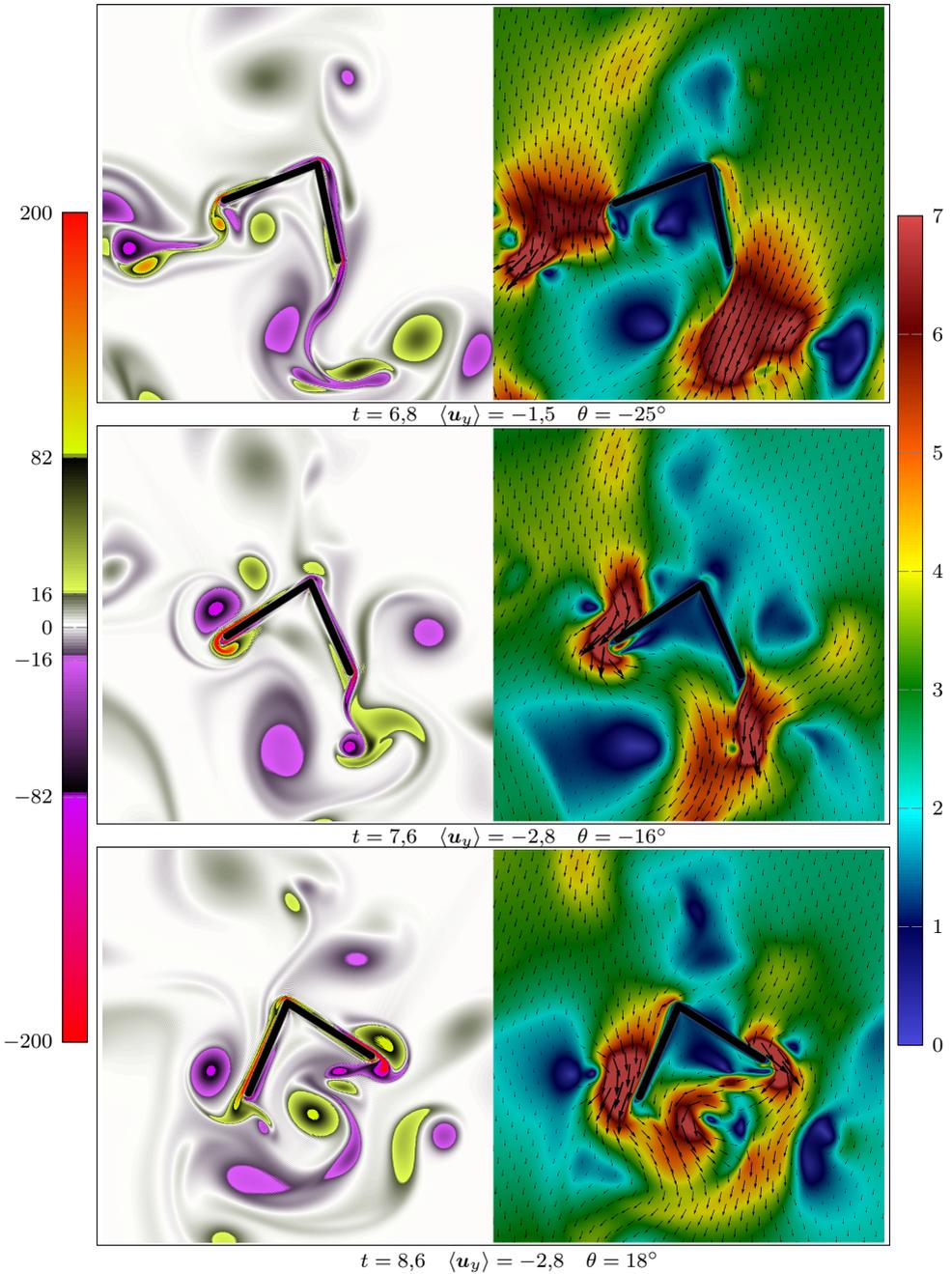


Abb. 5.22: Abfließen der Wirbel. Darstellung der Wirbelstärke (links) und der Geschwindigkeit (rechts) bei $Re = 250$, $\kappa = 4$. Spitzenwirbel formen sich zu lokalen Strömungsgebieten. Sie treffen auf die Flügel und beeinflussen die Stabilität des Fliegers. Weitere Parameter sind in der Tab. 5.4 zu finden.



6 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse im Kap. 5 konnten wichtige Erkenntnisse aufzeigen. Der zweidimensionale Λ -Flieger (s. Tab. 5.2) schwebt passiv ab $\kappa > 3,5$ bei $Re = 500$ in einer oszillierenden Strömung. Im Vergleich zu der Referenzstudie [18], welche mit *Vortex-Sheet*-Modell gemacht wurde, ist die maximal mögliche Steigrate $\Delta\langle y_s \rangle$ ab $\kappa > 5$ approximativ um 0,28 größer (s. Abb. 5.13). Der Unterschied in den Verläufen könnte dadurch erklärt werden, dass die Referenzstudie mit einer Modellierung der Viskosität realisiert wurde (s. [18, S.6]).

Die Aussage von [18], dass der Auftrieb auf Grund des Abfließens der Spitzenwirbel entsteht [18, S.8], kann nicht eindeutig durch die Ergebnisse dieser Arbeit bekräftigt werden. Wie in Abschn. 5.1 gezeigt, kann ein Teil des Auftriebes auch bei $\frac{T}{2}$ entstehen (s. Abb. 5.1). Zur dieser Zeit haben sich die Spitzenwirbel ausgebildet (s. Abb. 5.4). Im Druckfeld ist zu dieser Zeit ein Druckunterschied über dem linken und dem rechten Flügel festzustellen (s. Abb. 5.7). Dieser verursacht einen Teil der Auftriebskraft [11, S.109ff]. Es ist aber deutlich, dass im Falle des Steigens des Fliegers, auf Grund der Impulserhaltung, die abfließenden Wirbel den Λ -Flieger bei fallen entgegenwirken und ihn nicht tiefer fallen lassen (s. Abb. 5.11 für $\kappa = 5$).

Die Beobachtung von [18], dass das Verhalten von $\langle y_s \rangle$ in der Zeit linear ist, kann durch die Ergebnisse nicht repliziert werden (s. Abb. 5.15), weil die abfließenden Spitzenwirbel nicht schnell genug dissipieren können und erneut in das Umfeld des Fliegers eintreten (s. Abb. 5.9).

Die Studie zur Variation des Winkels α bei [18] zeigt, dass mit kleiner werdenden α die Steigrate $\Delta\langle y_s \rangle$ sich erhöht (s. Abb. 5.17). Es soll erwähnt werden, dass die Autoren dabei das θ fest halten, weil sie davon ausgehen, dass die Strömung symmetrisch ist. „*However, in later simulations with smaller values of α , we do enforce $\theta = 0$ for all time.*“ [18, S.8]. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen, dass wenn θ nicht festgehalten wird, die Lagestabilität ($|\theta| < 90^\circ$) für $\alpha < 35^\circ$ nicht gegeben ist (s. Abb. 5.17 und Abb. 5.16).

Die weiteren Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass der bestmögliche Auftrieb bei einem $\alpha = \{55^\circ; 60^\circ\}$ zustande kommt (s. Abb. 5.17). Das Verhalten von y_s bis $T_{\text{end}} = 25$ ist nicht ausreichend linear. Für präzisere Ergebnisse sollen Rechnungen mit $T_{\text{end}} \gg 25$ gemacht werden, um genauere Aussagen über den Verlauf der Steigrate in Abb. 5.17 zu treffen.

Die im Abschn. 5.1 gezeigte Unabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit von der REYNOLDS-Zahl darf nicht generalisiert werden. Die erneute Interaktion der bereits abgelösten Spitzenwirbel kann im Falle des Steigens anders sein. Diese Unabhängigkeit sollte ferner für eine längere Gesamtrechnzeit überprüft werden. Wie die Ergebnisse von [30, S.391] zeigen, ist bis $Re = 60$ eine relevante Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl vorhanden.

Durch das numerische Experiment, wo die Strömung unter einem Winkel zu dem Gravitationsvektor oszilliert (s. Abschn. 5.4), konnte gezeigt werden, dass sich die Spitzenwirbel beim Runterströmen in lokale Strömungsgebiete mit erhöhtem Betrag der Geschwindigkeit (*Jets*) umformen (s. Abb. 5.22). Diese *Jets* treffen dann die Flügel und üben ein Moment aus. Obwohl die Oszillation der Strömung einen Inzidenzwinkel aufweist, bleibt der gemittelte Momentenbeiwert \widehat{C}_m des Fliegers annähernd Null. Dies zeigt, dass der Rückstellmechanismus ausreichend stark ist, um auch mit einer erzwungenen Auslenkung zu funktionieren.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde, basierend auf dem Programmcode des Instituts ein Löser entwickelt. Der Basiscode konnte eine direkte numerische Simulation der NSG mit VPM für einen statischen Zylinder lösen. Darauf aufbauend wurde die FSI schwebender Körper, welche die Form eines Λ -Fliegers haben, in Fortran implementiert.

Der entwickelte FSI-Löser wurde durch eine Reihe numerischer Experimente validiert. Unter anderem wurde die theoretische Konsistenzordnung des DGIS's nachgewiesen. In einer der Validierungsstudien wurde der Einfluss der RB untersucht.

Durch den Validierungsprozess konnten einige Fehler im Programmcode entdeckt und beseitigt werden. In den darauf folgenden Simulationen konnten keine Unzulänglichkeiten in der Arbeitsweise des Löser festgestellt werden. Als ein Teilergebnis dieser Arbeit wurde ein effizienter Löser zur Untersuchung der schwebenden Körper entwickelt, der für die weitere Erforschung des entsprechenden Phänomens geeignet ist.

Die Arbeit verfolgte ein zweites Ziel. Es bestand darin, die Flugeigenschaften des Λ -Fliegers bei $Re > 200$ in einer oszillierenden Strömung zu untersuchen und mit der Referenzstudie [18] zu vergleichen. Dies wurde ausführlich in zwei der vier Studien realisiert. Zusammenfassend soll gesagt werden, dass das beste Steigen des Λ -Fliegers mit einem halben Öffnungswinkel $\alpha = 60^\circ$ erreicht wird. Bei $\alpha < 40^\circ$ wird der Flieger instabil und kippt um. Es wurde auch festgestellt, dass der Flieger auch an Höhe verlieren kann ohne seine Lagestabilität zu verlieren.

Die abfließenden Wirbelpaare wirken stabilisierend auf den Λ -Flieger. Dies wurde für $Re < 200$ in der Arbeit von [30] gezeigt. In dieser Arbeit wurde in einem Experiment gezeigt, dass dieser Mechanismus sogar bei einer schiefen Oszillation der Strömung funktioniert.

Bei der Betrachtung der Wirbelstärke konnte festgestellt werden, dass der Wandwirbel stark zusammengestaucht wird. Die Geschwindigkeit auf der Flügeloberseite kann nicht direkt abgeschätzt werden, weil

der Vorgang instationär ist. In den weiterführenden Untersuchungen soll überprüft werden, ob die Grenzschicht genügend gut aufgelöst wird und wie signifikant der Wandwirbel ist. Es ist außerdem interessant zu erforschen welcher Anteil der Auftriebskraft auf Grund der Scherspannungen erzeugt wird.

Literatur

- [1] B. E. Abali. *Computational Reality: Solving Nonlinear and Coupled Problems in Continuum Mechanics (Advanced Structured Materials)*. Springer, 2016.
- [2] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*. *Numerische Mathematik*, 81, 02 1999.
- [3] G. Bärwolff. *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [4] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2000.
- [5] Y. Bazilevs, K. Takizawa, and T. Tezduyar. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Wiley Series in Computational Mechanics. Wiley, 2013.
- [6] J. Berger. *Technische Mechanik für Ingenieure: Band 1: Statik*. Aus dem Programm Grundgebiete des Maschinenbaus. Vieweg+Teubner Verlag, 1 edition, 1991.
- [7] J. Berger. *Technische Mechanik für Ingenieure: Band 3: Dynamik*. Viewegs Fachbücher der Technik. Vieweg+Teubner Verlag, 1 edition, 1998.
- [8] T. Butz. *Fouriertransformation für Fußgänger. 7. Auflage*. 7. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 7, akt. Aufl. 2011 edition, 2011.
- [9] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains (Scientific Computation)*. Springer, 2011.
- [10] M. Dinesh, M. V. Kenny, V. V. Dharni, K. B. Santhosh, and R. R. Sree. *Diagnostic Investigation of Aircraft Performance at Different Winglet Cant Angles*. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 8(12):110 – 119, 2014.

-
- [11] F. Dubs. *Aerodynamik der reinen Unterschallströmung*. Flugtechnische Reihe 1. Birkhäuser Basel, 1979.
- [12] D. Dutykh. *A brief introduction to pseudo-spectral methods: application to diffusion problems*. Lecture - 55 pages, 40 references, 14 figures., Apr. 2016.
- [13] T. Engels. *Numerical Modeling of Fluid-Structure Interaction in Bio-Inspired Propulsion*. PhD thesis, Technische Universität Berlin; Aix*Marseille Universite, 2015.
- [14] T. Engels, D. Kolomenskiy, K. Schneider, and J. Sesterhenn. *Numerical simulation of fluid-structure interaction with the volume penalization method*. Journal of Computational Physics, 281:96–115, jan 2015.
- [15] C. Ericson. *Real-Time Collision Detection*. The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3-D Technology. Morgan Kaufmann, 2005.
- [16] T. Fließbach. *Mechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*. Fließbach, Torsten: Lehrbuch zur theoretischen Physik. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [17] R. Garcia-Mayoral and J. Jimenez. *Drag reduction by riblets*. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 369(1940):1412–1427, mar 2011.
- [18] Y. Huang, M. Nitsche, and E. Kanso. *Hovering in oscillatory flows*. Journal of Fluid Mechanics, 804:531–549, sep 2016.
- [19] W.-H. Hucho. *Aerodynamik der stumpfen Körper: Physikalische Grundlagen und Anwendungen in der Praxis*. Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. Vieweg+Teubner Verlag, 2002.
- [20] B. Kadoch, D. Kolomenskiy, P. Angot, and K. Schneider. *A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles*. Journal of Computational Physics, 231(12):4365–4383, jun 2012.

- [21] D. Kolomenskiy and K. Schneider. *A Fourier spectral method for the Navier–Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles*. Journal of Computational Physics, 228 (16):5687–5709, sep 2009.
- [22] B. Lukasch. *Otto Lilienthal: Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*. Klassische Texte der Wissenschaft. Springer Spektrum, 1 edition, 2014.
- [23] W. H. Müller. *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 1st edition. edition, 2011.
- [24] L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, web draft edition, 1998.
- [25] R. Peyret. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Applied Mathematical Sciences 148. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2002.
- [26] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 1 edition, 2000.
- [27] C. Pozrikidis. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2 edition, 2011.
- [28] A. Salih. *Streamfunction-Vorticity Formulation*. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, 2013.
- [29] N. K. Schade H. *Tensoranalysis*. de Gruyter, 3ed. edition, 2009.
- [30] X. Shao, X. Zhang, Z. Yu, and J. Lin. *Numerical studies on the dynamics of an open triangle in a vertically oscillatory flow*. Journal of Fluid Mechanics, 788:381–406, jan 2016.
- [31] M. van de Vel. *Theory of Convex Structures*. North-Holland Mathematical Library 50. North Holland, 1 edition, 1993.
- [32] A. Weathers, B. Folie, B. Liu, S. Childress, and J. Zhang. *Hovering of a rigid pyramid in an oscillatory airflow*. Journal of Fluid Mechanics, 650:415, mar 2010.

- [33] M. W. Wong. *Discrete Fourier Analysis*. Pseudo-Differential Operators 5. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.